Mathematische Logik I

— Foliensatz 10 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Eigenschaften von Formeln

Definition 1 (Tautologie, Kontradiktion)

Es sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel.

- ϕ heißt *allgemeingültig* oder *tautologisch*, falls für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$. Schreibe: $\models \phi$.

  (Jede $\mathfrak{L}$-Struktur ist ein Modell von ϕ.)
- ϕ heißt *widersprüchlich* oder *kontradiktorisch*, falls $\models \neg\phi$.

Bemerkung:

Hingegen heißt $\not\models \phi$ in der Quantorenlogik lediglich, dass es eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt mit $\mathfrak{A} \not\models \phi$.
Dies ist nicht hinreichend dafür, dass ϕ eine Kontradiktion ist.

Aussagenlogische Form

Definition 2 (AL-Form)

Eine Formel ϕ hat die *aussagenlogische Form* der AL-Formel ψ, falls ϕ durch geeignete Substitution der Aussagevariablen von ψ entsteht.

Es gibt also für ψ mit $\mathrm{ATM}(\psi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ prädikatenlogische Formeln $\phi_1, \ldots \phi_n \in \mathfrak{L}$, so dass folgendes gilt:

$$\phi \doteq \psi[\phi_1, \ldots, \phi_n / p_1, \ldots, p_n]$$

Aussagenlogische Form

Beispiele:

1. Jede prädikatenlogische Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ hat trivialerweise die AL-Form p_0, da $\phi \doteq p_0[\phi/p_0]$.
2. $\forall x(x \doteq x) \rightarrow (\exists x(x \doteq x) \rightarrow \forall x(x \doteq x))$ hat unter anderem die AL-Form $p_1 \rightarrow p_2$, aber auch die AL-Form $p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$.

Bemerkung:

Die AL-Form einer Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ ist nicht eindeutig gegeben!

Permanenz der AL in der QL

Theorem 3 (Permanenz)

Hat eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ die AL-Form einer aussagenlogischen Tautologie ψ, dann ist sie (im Sinne der Quantorenlogik) allgemeingültig.

Beispiel:

Die Formel $\forall x\phi \to (\exists x(\psi \to \chi) \to \forall x\phi)$ ist für beliebige Formeln $\phi, \psi, \chi \in \mathfrak{L}$ allgemeingültig, da sie die AL-Form der AL-Tautologie $p \to (q \to p)$ hat.

Permanenz der AL in der QL

Beweisskizze:

Es gelte für geeignete Formeln: $\phi \doteq \psi[\phi_1, \ldots, \phi_n / p_1, \ldots, p_n]$.

Sei dann $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur und v eine beliebige Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$.

Ferner sei w_v eine aussagenlogische Wahrheitswertzuordnung, die für $1 \leq k \leq n$ wie folgt definiert ist:

$$w_v(p_k) =_{\mathrm{def}} [\![\phi_k]\!]_v^{\mathfrak{A}}$$

Mit einer leichten Induktion läßt sich zeigen: $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_{w_v} = 1$

Da v beliebig gewählt wurde, gilt also: $\mathfrak{A} \models \phi$.

Da $\mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, gilt insgesamt: $\models \phi$. $\square$

Logische Forlgerung

Definition 4 (Logische Folgerung)

Eine Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ *folgt logisch* aus einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$, falls für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und darin für jede Belegung v gilt:

$$\text{Wenn } \mathfrak{A} \models_v \Gamma, \text{ dann } \mathfrak{A} \models_v \phi.$$

Schreibweise: $\Gamma \models \phi$.

Logische Forlgerung

Bemerkungen:

1. Es genügt nicht, solche Strukturen zu betrachten, in denen Γ gültig ist. Insbesondere müssen auch in Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$ Belegungen v betrachtet werden mit $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$.
2. Vergleicht man diese Definition mit der aussagenlogischen Folgerung, wird die Parallele zwischen den Wahrheitswertzuordnungen einerseits und den Strukturen und Belegungen andererseits deutlich.
3. Sind $\Delta, \Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ zwei Formelmengen und $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel, dann folgt aus $\Delta \subseteq \Gamma$ und $\Delta \models \phi$ schon $\Gamma \models \phi$. (Monotonie der Folgerungsbeziehung.)

Logische Forlgerung

4 Die logische Folgerung ist bei uns für Formeln mit freien Variablen so definiert, dass sie für jede einzelne Belegung gilt. Häufig wird der Begriff der logischen Folgerung nur für Aussagen definiert.

5 Mithilfe des Koinzidenz-Lemmas (9.5) kann die Definition für Aussagen vereinfacht werden:

Es sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Aussage und $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Aussagenmenge. Dann ist $\Gamma \models \phi$ genau dann, wenn für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \Gamma$, dann $\mathfrak{A} \models \phi$.

6 Ist $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ endlich, dann schreiben wir auch $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ statt $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \phi$

Import-Export

Theorem 5 (Import-Export)

Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ Formelmenge, $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ zwei Formeln. Dann gilt:
$\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$ genau dann, wenn $\Gamma \models \psi \to \phi$.

<u>Beweis:</u>

"$\Rightarrow$": Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur, v eine Belegung, so dass $\mathfrak{A} \models_v \Gamma$.

Falls $\mathfrak{A} \not\models_v \psi$, dann gilt schon $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \phi$.

Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models_v \psi$, dann folgt aus $\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$ zunächst $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und wieder $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \phi$.

"$\Leftarrow$": Analog. $\square$

Logische Äquivalenz

Definition 6 (Logische Äquivalenz)

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ heißen *logisch-äquivalent*, $\phi \mathrel{=\joinrel\mid\joinrel\models} \psi$, falls $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$.

Bemerkung:

Zwei Formeln $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ sind genau dann logisch-äquivalent, wenn $\models \phi \leftrightarrow \psi$ gilt.

Eigenschaften von Quantoren

Proposition 7 (Eigenschaften von Quantoren)

Für alle $\mathfrak{L}$-Formeln ϕ und alle Variablen x gelten folgende Beziehungen:

1. *Dualität von $\forall$ und $\exists$:*
   $\exists x \phi \dashv\models \neg \forall x \neg \phi$
   $\forall x \phi \dashv\models \neg \exists x \neg \phi$
2. *Transposition gleicher Quantoren:*
   $\forall x \forall y \phi \dashv\models \forall y \forall x \phi$
   $\exists x \exists y \phi \dashv\models \exists y \exists x \phi$
3. *Transposition von $\forall$ vor $\exists$:*
   $\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi$

Eigenschaften von Quantoren

Beweis:

Verbleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Bemerkung:

Eigenschaft (3) ist keine logische Äquivalenz, sondern lediglich eine Folgerungsbeziehung!

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, d.h. es gibt Formeln ϕ mit: $\forall x \exists y \phi \not\models \exists y \forall x \phi$.

Substitution

Definition 8 (Substitution)

Die Substitutionen der Quantorenlogik sind wie folgt definiert:

1. Sei $t, s \in$ TERM, x eine Variable: $t[s/x]$ ist derjenige Term, in der jedes Vorkommen von x in t durch s ersetzt wurde.
2. Sei $\phi \in \mathfrak{L}$, $s \in$ TERM und x eine Variable: $\phi[s/x]$ ist diejenige Formel, in der jedes freie (!) Vorkommen der Variablen x in der Formel ϕ durch den Term s ersetzt wurde.

Substitution

Definition 8 (Substitution (Forts.))

3. Sei $\phi \in \mathfrak{L}$, $s_1, \ldots, s_n \in$ TERM und $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden Variablen: $\phi[s_1/x_1, s_2/x_2, \ldots, s_n/x_n]$ ist diejenige Formel, in der simultan alle freien Vorkommen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in der Formel ϕ durch die entsprechenden Terme ersetzt wurden. Schreibe: $\phi[\vec{s}/\vec{x}]$.
4. Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Formelmenge, $s \in$ TERM und x eine Variable, dann ist $\Gamma[s/x] =_{\text{def}} \{\phi[s/x];\ \phi \in \Gamma\}$.

Substitution

Konvention:

Es soll für die Substitution auch die folgende informelle, suggestive Notation verwendet werden:

Wird an einer Stelle $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben, bedeutet dies, dass in der Formel ϕ die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen können.

Wird dann im selben Kontext $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ geschrieben, dann ist damit die simultane Substitution der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die Terme $t_1, \ldots, t_n$ gemeint.

Substitution

Bemerkungen:

1. Man beachte, dass bei der Substitution nur freie Vorkommen einer Variablen ersetzt werden. Gebundene Vorkommen der Variablen bleiben unverändert.
2. Wie schon in der Aussagenlogik unterscheidet sich die mehrfache Hintereinanderausführung von Substitutionen von der simultanen Substitution. Beispiele hierfür lassen sich wie in der Aussagenlogik leicht angeben.
3. Eine Formel kann bei Substitution ihre Bedeutung wesentlich verändern; dies geschieht, wenn durch die Substitution neue Variablen in den Wirkungsbereich von Quantoren kommen.

Substitution

Beispiel:

Betrachte die Formel $\phi \doteq_{\text{def}} \exists x(x = 1 + y)$.

Unabhängig von der Belegung der Variablen y gilt diese Formel in den natürlichen Zahlen.

Betrachten wir nun verschiedene Substitutionen:

- $\phi[z/y] \doteq \exists x(x = 1 + z)$
  Hierbei hat sich an der Wahrheit der Formel nichts geändert.
- $\phi[x/y] \doteq \exists x(x = 1 + x)$
  Diese Formel ist in den natürlichen Zahlen nicht mehr gültig! Ihr Wahrheitswert hat sich verändert.

Dies ist problematisch, da eine Substitutionsoperation stets wahrheitskonservierend sein sollte.

Freie Einsetzbarkeit

Definition 9 (Freie Einsetzbarkeit)

Ein Term t ist in einer Formel ϕ *frei einsetzbar* für die Variable x, falls einer der folgenden Fälle zutrifft:

1. ϕ ist atomar;
2. $\phi \doteq (\psi \circ \chi)$ und t ist sowohl in ψ als auch in χ für x frei einsetzbar;
3. $\phi \doteq \neg\psi$ und t ist in ψ für x frei einsetzbar;
4. $\phi \doteq Qy\psi$ für einen Quantor $Q \in \{\forall, \exists\}$, und es gilt:
   - $x \notin \mathrm{FV}(\phi)$ <u>oder</u>
   - $y \notin \mathrm{FV}(t)$ und t ist frei einsetzbar für x in ψ.

Freie Einsetzbarkeit

Bemerkung:

Freie Einsetzbarkeit heißt, dass durch die Substitution keine Variable in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät, der diese Variable binden würde.

Konvention:

Im Folgenden wird bei Substitutionen immer vorausgesetzt, dass freie Einsetzbarkeit vorliegt.

Überführungs-Lemma

Lemma 10 (Überführungs-Lemma)

Sei $\phi(x) \in \mathfrak{L}$ beliebige Formel, t ein Term, der in ϕ für die Variable x frei einsetzbar ist.

Dann gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung v:

$$[\![\phi(t)]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi(x)]\!]_{v[x \mapsto [\![t]\!]_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$$

Beweis:

Verbleibt als Übung. $\square$

Gebundene Umbenennung

Definition 11 (Variante, Gebundene Umbenennung)

Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formel.

1. Für den Quantor $Q \in \{\forall, \exists\}$ sei $Qx\,\psi(x)$ eine Teilformel von ϕ und y eine Variable, die in ϕ nicht vorkommt.

   Die Formel ϕ', die aus ϕ entsteht, indem die Teilformel $Qx\,\psi(x)$ durch die Formel $Qy\,\psi(y)$ ersetzt wurde, heißt *einfache Variante* von ϕ.

   Diese Ersetzung von Teilformeln wird *gebundene Umbenennung* genannt.

Variante

Definition 11 (Variante, Gebundene Umbenennung)

2. Entsteht ϕ' durch beliebig häufige Anwendung der gebundenen Umbenennung aus ϕ, so heißt ϕ' *Variante* von ϕ.
3. Eine Formelmengen $\Gamma' \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Variante* einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$, falls sie folgendes erfüllt:
   - Jede Formel $\phi' \in \Gamma'$ ist Variante einer Formel $\phi \in \Gamma$, und
   - für jede Formel $\phi \in \Gamma$ gibt es eine Formel $\phi' \in \Gamma'$, so dass ϕ' eine Variante von ϕ ist.

Variante

Bemerkungen:

1. Durch die gebundene Umbenennung kann man erreichen, dass zu einer vorgegebenen Formel ϕ und einem Term t eine Variante ϕ' von ϕ gefunden wird, in der t frei einsetzbar ist, dass also alle gebundenen Variablen von ϕ' verschieden sind von den freien Variablen in t.
2. Variantenbildung ist nicht symmetrisch.
   So ist etwa die Formel $\psi \doteq_{\text{def}} \forall x(x \doteq x) \wedge \forall y(y \doteq y)$ eine Variante der Formel $\phi \doteq_{\text{def}} \forall x(x \doteq x) \wedge \forall x(x \doteq x)$.

   Da aber bei der Variantenbildung nur neue Variablen zugelassen sind und jeweils nur ein Vorkommen eines Quantors ersetzt wird, kann ϕ keine Variante von ψ sein.

Variante

1. Ist eine Formel $\psi \in \mathfrak{L}$ Variante einer Formel $\phi \in \mathfrak{L}$, dann sind ϕ und ψ logisch-äquivalent.
   (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen natürlich nicht.)
2. VORSICHT: Die Variante Γ' einer Formelmenge Γ muss nicht die gleiche Kardinalität haben wie die ursprüngliche Menge!

   So ist z.B. $\{\phi' \in \mathfrak{L} : \ \phi'$ ist Variante von $\forall x(x \doteq x)\}$ eine unendliche Variante der einelementigen Menge $\{\forall x(x \doteq x)\}$.

   Ebenfalls kann die Variante einer Menge echt kleiner als die ursprüngliche Menge werden, falls in der ursprünglichen Menge verschiedene Varianten einer Formel enthalten sind.

   So ist $\{\forall x(x \doteq x)\}$ eine Variante der Menge $\{\forall x(x \doteq x), \forall y(y \doteq y)\}$.

Vorbemerkung

Im Folgenden werden pränexe Normalformen von Formeln diskutiert.

Um die Beweise zu vereinfachen, wird ab hier angenommen, dass neben den beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ lediglich $\perp$ und $\rightarrow$ als Junktoren in der Sprache vorkommen. Die anderen Junktoren werden als abkürzende Schreibweisen verstanden.

Zur Konstruktion einer PNF zu einer beliebigen Formel werden zunächst einige logische Äquivalenzen benötigt.

Logische Äquivalenzen

Theorem 12

Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ *beliebige Formeln,* x *eine Variable mit* $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$*.*
Dann gelten folgende Äquivalenzen:

1. $(\psi \to \forall x \phi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \forall x(\psi \to \phi)$
2. $(\psi \to \exists x \phi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \exists x(\psi \to \phi)$
3. $(\exists x \phi \to \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \forall x(\phi \to \psi)$
4. $(\forall x \phi \to \psi) \mathrel{=\!\mid\!\models} \exists x(\phi \to \psi)$

Logische Äquivalenzen

<u>Beweis:</u>

Wir zeigen exemplarisch (1), der Rest verbleibt als Übung.

Sei dazu $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ beliebige Struktur, v beliebige Belegung.

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \to \phi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \forall x \phi$.

"$\Leftarrow$": Es gelte also: $\mathfrak{A} \models_v \forall x(\psi \to \phi)$.

Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \psi \to \forall x \phi$.

Dann muss gelten: $\mathfrak{A} \models_v \psi$, und es gibt $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \phi(x)$.

Da $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ gilt mit dem Koinzidenz-Lemma: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \psi$.

Damit wurde aber ein $a \in A$ gefunden mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \psi \to \phi$.

Daher gilt: $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x(\psi \to \phi)$. Widerspruch!

Logische Äquivalenzen

"$\Rightarrow$": Es gelte nun $\mathfrak{A} \models_v \psi \to \forall x \phi$.

Angenommen $\mathfrak{A} \not\models_v \forall x(\psi \to \phi)$.

Dann gibt es ein $a \in A$ mit: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} (\psi \to \phi)$. $\quad (\star)$

Damit gilt insbesondere: $\mathfrak{A} \models_{v[x \mapsto a]} \psi$.

Und mit Koinzidenz-Lemma auch: $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Nach Voraussetzung muss also auch gelten: $\mathfrak{A} \models_v \forall x \phi$

Nach $(\star)$ gilt aber: $\mathfrak{A} \not\models_{v[x \mapsto a]} \phi$. $\quad$ Widerspruch!

Damit wurden beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt. $\square$

Pränexe Normalform

Definition 13 (Pränexe Normalform)

Eine Formel ϕ heißt *Pränexe Normalform* (PNF), falls sie der Form $\phi \doteq Q_1 x_{k_1} \dots Q_n x_{k_n} \psi$ ist, wobei die Q_i beliebige Quantoren und ψ eine quantorenfreie Formel sind.

Der Quantorenblock $Q_1 x_{k_1} \dots Q_n x_{k_n}$ wird auch *Präfix* und die Formel ψ als *Kern* oder *Matrix* von ϕ bezeichnet.

Theorem 14 (Existenz einer PNF)

Zu jeder Formel $\phi \in \mathfrak{L}$ gibt es eine logisch-äquivalente Formel $\psi \in \mathfrak{L}$, so dass ψ eine pränexe Normalform ist und dieselben freien Variablen wie ϕ hat, d.h. $\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(\psi)$.

Pränexe Normalform

<u>Beweis:</u>

Um die Behauptung zu beweisen, werden die Äquivalenzen aus Theorem 10.12 verwendet.

Dazu muss allerdings sichergestellt werden, dass die Variablenbedingung stets erfüllt ist.

Dies erreicht man durch die Verwendung geeigneter Varianten der zu betrachtenden Formeln.

Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelaufbau.

Pränexe Normalform

I. Induktionsanfang:

Wenn ϕ atomar ist, dann ist ϕ bereits in PNF.

II. Induktionsvoraussetzung:

Zu ψ und χ gibt es geeignete Formeln ψ' und χ' in PNF.

III. Induktionsschluss:

$\phi \doteq Qx\psi$ für $Q \in \{\forall, \exists\}$: Dann ist die Formel $Qx\psi'$ in PNF.
Ebenfalls gilt $\mathsf{FV}(\phi) = \mathsf{FV}(Qx\psi')$ und $\phi \mathrel{=\mkern-3mu|\mkern-3mu|\mkern-3mu=} Qx\psi'$.

Pränexe Normalform

$\phi \doteq \psi \to \chi$: Mit der IV erhalten wir geeignete ψ' und χ' in PNF.
Es gilt also:

$$\psi' \doteq Q_1 1 x_1 \dots Q_n x_n \psi'' \quad \text{und} \quad \chi' \doteq Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_{n+m} x_{n+m} \chi''$$

für geeignete $n, m \in \mathbb{N}$ und $\psi'', \chi'' \in \mathfrak{L}$ quantorenfrei.

Seien $y_1, \dots, y_{n+m}$ paarweise verschiedene, neue Variablen, die alle nicht in $\phi' \doteq \psi' \to \chi'$ vorkommen.

Insbesondere gilt für $1 \leq i \leq n + m$ damit: $y_i \notin \mathrm{FV}(\phi') \quad (\star)$

Pränexe Normalform

Sei ϕ''' das Resultat der gebundenen Umbenennungen aller Quantoren $Q_i x_i$ in $Q_i y_i$ in der Formel ϕ''.

Nun können alle Quantoren von ϕ''' der Reihe nach mit Theorem 10.13 vor die Formel gezogen werden, da aufgrund von $(\star)$ die Variablenbedingung erfüllt ist.

Das Resultat $\widetilde{\phi}$ hat dieselben freien Variablen wie ϕ, beide Formeln sind logisch-äquivalent und $\widetilde{\phi}$ ist eine PNF. $\square$

Pränexe Normalform

Bemerkungen:

1. Die PNF zu einer Formel ϕ ist nicht eindeutig bestimmt.

   Es kommt auf die Umbenennung der gebundenen Variablen an, auf die Reihenfolge, in der die einzelnen Quantoren nach vorne gezogen werden, und schließlich kann man die innere Formel ψ auch durch logisch-äquivalente Formeln ersetzen.

2. Verwendet man weitere Junktoren in der Sprache, kann man diese entweder alle durch $\rightarrow$ und $\perp$ ausdrücken.

   Ansonsten würden weitere logische Äquivalenzen benötigt werden, mittels derer die Quantoren aus den Teilformeln herausgezogen werden können.

Pränexe Normalform

3. Der Satz deutet nur an, wie man zu einer gegebenen Formel ϕ eine PNF findet.

   Zum Zwecke eines Verfahrens ist sinnvoller, als ersten Schritt alle gebunden Variablen wie im Fall $\rightarrow$ umzubenennen.

   Weitere Umbenennungen sind dann nicht mehr notwendig, und die Quantoren können schrittweise aus den einzelnen Teilformeln herausgezogen werden.