Mathematische Logik I

— Foliensatz 12 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Vorbemerkung

Wie schon in der Aussageblogik umfaßt der weite Begriff der Vollständigkeit sowohl die Korrektheit als auch die eigentliche Vollständigkeit eines Kalküls.

Ziel dieses Abschnittes ist die Vollständigkeit des Kalküls $\mathrm{NK}_{\doteq}$ zu zeigen.

Dafür wird zunächst der Theorie-Begriff benötigt.

Damit gelingt es, die Existenz von Modellen für widerspruchsfreie Aussagenmengen zu zeigen.

Daraus folgt dann die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls.

Vorbemerkung

Zur Vereinfachung der Beweise wird eine formale Sprache $\mathfrak{L}$ lediglich mit den Junktoren $\perp$ und $\rightarrow$ und dem Quantor $\forall$ vorausgesetzt.

Die anderen Junktoren und der Existenzquantor werden als abkürzende Schreibweise verstanden.

(Im strengen Sinn zeigen wir die Vollständigkeit des Kalküls $\mathsf{NK}'_{\doteq}$.)

Die Signatur der Sprache ist beliebig!

Analog zu den (maximal)-konsistenten Mengen der Aussagenlogik werden in der Quantorenlogik (vollständige) Theorien eingeführt.

Theorie

Definition 1

Sei $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Menge von Aussagen(!).

1. Γ ist *deduktiv abeschlossen*, falls für jede Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt: Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\phi \in \Gamma$.

   Eine deduktiv abgeschlossene Menge Γ heißt *Theorie*.
2. Eine Theorie Γ heißt *widerspruchsfrei* (*konsistent*), falls $\bot \notin \Gamma$.
3. Eine Theorie Γ heißt *vollständig*, falls für jede Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ gilt: $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$.
4. Die Menge $\mathrm{Ded}(\Gamma) =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathfrak{L} : \Gamma \vdash \phi$ und $\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing\}$ ist der *deduktive Abschluss von* Γ.

Theorie

Bemerkung:

Sei $T \subseteq \mathfrak{L}$ eine Theorie.

1. Es gilt $T = \mathrm{Ded}(T)$. Umgekehrt folgt aus $T = \mathrm{Ded}(T)$ bereits, dass T eine Theorie ist, da $\mathrm{Ded}(\Gamma)$ für jede Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Theorie ist.

   Letzteres erlaubt einen etwas lockeren Sprachgebrauch, bei dem Aussagenmengen Γ mit ihren Theorien $T_\Gamma =_{\mathrm{def}} \mathrm{Ded}(\Gamma)$ identifiziert werden.

Theorie

2. Ist $\perp \in T$, dann gilt schon $T = \mathrm{SENT}$. Es gibt also genau eine widersprüchliche Theorie. Diese ist nach Definition vollständig.
3. Die Widerspruchsfreiheit von T läßt sich auch wie folgt charakterisieren: es gibt eine Aussage $\phi \in \mathfrak{L}$ mit $\phi \notin T$.
4. Es gibt widerspruchsfreie Theorien T, die nicht vollständig sind.

Axiomatisierung

Definition 2 (Axiomatisierung)

Eine Aussagen-Menge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Axiomatisierung* einer Theorie T, falls gilt: $T = \mathrm{Ded}(\Gamma)$.

Bemerkung:

1. Jede Theorie T ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit eine triviale Axiomatisierung ihrer selbst.
2. In der Regel sucht man nach der kleinsten Menge Γ, die eine Theorie axiomatisiert.

Theorie der Gruppentheorie

Beispiel (Theorie der Gruppentheorie):

Die Gruppentheorie G wird in der Sprache $\mathfrak{L}_G$ durch die Menge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ axiomatisiert, die folgende Aussagen enthält:

1. Assoziativität: $\forall x \forall y \forall z((x \dot{+} y) \dot{+} z \doteq x \dot{+} (y \dot{+} z))$
2. Neutral-Element: $\forall x(x \dot{+} \dot{0} \doteq x)$
3. Inverses-Element: $\forall x \exists y(x \dot{+} y \doteq \dot{0})$

Die resultierende Theorie $G =_{\text{def}} \{\phi \in \mathfrak{L}_G : \Gamma \vdash \phi \text{ und } FV(\phi) = \varnothing\}$ ist widerspruchsfrei und unvollständig.

So läßt sich die Kommutativität aus den Axiomen nicht ableiten.

Ein rein syntaktischer Beweis dieser Aussage übersteigt aber den Rahmen dieser Vorlesung.

Die Behauptungen wie gewohnt durch die Angabe von geeigneten Strukturen zu beweisen (eine kommutative und eine nicht-kommutative Gruppe würde hier genügen), ist an dieser Stelle nicht erlaubt.

Dazu fehlt noch die Gleichwertigkeit von Ableitbarkeit und Folgerung (genauer: die eigentliche Vollständigkeit des Kalküls).

Henkin-Theorie

Im folgenden soll gezeigt werden, dass jede widerspruchsfreie Theorie T ein Modell besitzt.

Das bedeutet: zu einer Theorie T muss eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gefunden werden, in der T gültig ist, d.h. mit $\mathfrak{A} \models T$.

Dies ist insbesondere aufgrund existenziell quantifizierter Formeln problematisch.

Um dies zu erreichen, müssen sogenannte Henkin-Theorien betrachtet werden.

Henkin-Theorie

Definition 3 (Henkin-Theorie)

Eine Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *Henkin-Theorie*, falls es zu jeder Existenz-Aussage $\exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}$ (d.h. nicht nur in der T selbst!) eine Individuen-Konstante $\dot{c}$ (im Alphabet von $\mathfrak{L}$) gibt, so dass $(\exists x \phi(x) \to \phi(\dot{c})) \in T$.

Bemerkungen:

1. Die Konstante $\dot{c}$ wird auch *Zeuge* (engl. *witness*) der Existenzaussage $\exists x \phi(x)$ genannt.
2. Der Zeuge $\dot{c}$ einer Eigenschaft $\phi(x)$ muss diese nicht besitzen. Es gilt: $T \vdash \phi(\dot{c})$ nur, falls $T \vdash \exists x \phi(x)$.

Henkinisierung

Es läßt sich zeigen, dass vollständige Henkin-Theorien Modelle besitzen, sog. *Term-Modelle*.

Dementsprechend ist das Ziel, eine gegebene Theorie zu "Henkinisieren". Das heißt, die Theorie in einer erweiterten Sprache zu einer Henkin-Theorie zu erweitern. Diese resultierende Theorie wird dann in einem weiteren Schritt vervollständigt.

Notation (Spracherweiterung):

Sei $\mathfrak{L}$ eine formale Sprache und I eine Indexmenge.
Dann bezeichnet $\mathfrak{L} \sqcup \{\dot{c}_i : i \in I\}$ die Sprache $\mathfrak{L}'$, die aus $\mathfrak{L}$ entsteht, indem das Alphabet von $\mathfrak{L}$ um die Konstanten aus $\{\dot{c}_i : i \in I\}$ erweitert wird.

Henkinisierung

Definition 4 (Henkinisierung)

Die Sprache $\mathfrak{L}$ wird schrittweise durch neue Konstanten zur Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ erweitert.

Damit sollen genügend Konstanten zur Sprache $\mathfrak{L}$ hinzugefügt werden, um aus einer gegebenen Theorie T eine Henkin-Theorie zu konstruieren.

- $\mathfrak{L}_0 =_{\mathrm{def}} \mathfrak{L}$
- Sei $\mathfrak{L}_n$ schon konstruiert.
  $\mathfrak{L}_{n+1} =_{\mathrm{def}} \mathfrak{L}_n \sqcup \{\dot{c}_\phi : \exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}_n \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \{x\}\}$,
  wobei die $\dot{c}_\phi$ neue Konstanten sind, die in $\mathfrak{L}_n$ nicht vorkommen.
- $\mathfrak{L}_H =_{\mathrm{def}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}_n$

Henkinisierung

Bemerkungen:

1. Die Iteration in der Konstruktion ist notwendig, da in jedem Schritt neue Aussagen entstehen, die bezeugt werden müssen.
2. Die Kardinalität der Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ ist gleich der Kardinalität der ursprünglichen Sprache $\mathfrak{L}$.

Im folgenden Schritt wird gezeigt, dass man (geeignete) Beweise in der reicheren Sprache $\mathfrak{L}_H$ zurückführen kann auf Beweise in der ursprüngliche Sprache $\mathfrak{L}$.

Konstanten-Ersetzung

Lemma 5 (Konstanten-Ersetzung)

Sei $\mathfrak{D}$ eine $\mathfrak{L}_H$-Ableitung und x eine Variable, die in der gesamten Ableitung weder gebunden noch ungebunden vorkommt.

Ersetzt man in der Ableitung in jeder Formel jedes Vorkommen einer Konstanten $\dot{c}$ durch die Variable x, dann ist das Resultat der Ersetzung $\mathfrak{D}[x/\dot{c}]$ eine $\mathfrak{L}$-Ableitung.

Konstanten-Ersetzung

Beweis:

Durch Induktion über den Aufbau von Ableitungen.

I. Induktionsanfang:

$\mathcal{D} \doteq \phi$: $\phi[x/\dot{c}]$ ist trivialerweise eine gültige Ableitung.

II. Induktionsvoraussetzung:

Es gelte Behauptung für Ableitungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$.

Konstanten-Ersetzung

III. Induktionsschluss:

$$\mathcal{D} \doteq \dfrac{\begin{matrix} \mathfrak{D}_1 \\ \phi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{D}_2 \\ \phi \to \psi \end{matrix}}{\psi}\;(\to E)$$

Sei x eine Variable, die nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommt. Damit kommt x weder in $\mathfrak{D}_1$ noch in $\mathfrak{D}_2$ vor und die IV ist anwendbar.

Da die Konklusion von $\mathfrak{D}_1[x/\dot{c}]$ die Formel $\phi[x/\dot{c}]$ und die Konklusion von $\mathfrak{D}_2[x/\dot{c}]$ die Formel $\phi[x/\dot{c}] \to \psi[x/\dot{c}]$ ist, gilt:

(→E) ist anwendbar und $\mathfrak{D}[x/\dot{c}]$ ist wieder eine Ableitung.

Wenn $\mathfrak{D}$ durch Anwendung einer anderen Regel entsteht, so ist dies analog zum Fall oben. $\square$

Erweiterung einer Theorie

Definition 6 (Erweiterung einer Theorie)

Seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ zwei Sprachen erster Stufe. Seien $T \subseteq \mathfrak{L}$ und $T' \subseteq \mathfrak{L}'$ zwei Theorien.

1. T' heißt *Erweiterung* von T, falls $T \subseteq T'$.
2. T' heißt *konservative* Erweiterung von T, falls zusätzlich $T' \cap \mathfrak{L} = T$.

Erweiterung einer Theorie

Bemerkung:

Der Begriff der Theorie ist aufgrund ihrer deduktiven Abgeschlossenheit sprachabhängig.

Das bedeutet: Eine Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ ist in einer erweiterten Sprache $\mathfrak{L}'$ keine Theorie mehr.

Ist etwa $\dot{c}$ eine Konstante, die in $\mathfrak{L}$ nicht vorkommt, gilt damit $(\dot{c} \doteq \dot{c}) \notin T$.

Da aber $T \vdash_{\mathfrak{L}'} \dot{c} \doteq \dot{c}$ gilt, ist $T \subseteq \mathfrak{L}'$ nicht mehr deduktiv abgeschlossen.

Konservative Henkin-Erweiterungen

Definition 7 (Henkin-Erweiterung)

In der Henkin-Sprache $\mathfrak{L}_H$ kann man zu einer Theorie T eine Henkin-Theorie durch $T_{(H)}$ axiomatisieren:

$$T_{(H)} =_{\mathrm{def}} T \cup \{\exists x \phi(x) \to \phi(\dot{c}_\phi) : \exists x \phi(x) \in \mathfrak{L}_H \text{ und } \mathrm{FV}(\phi) = \{x\}\}$$

Lemma 8 (Konservativität)

Die obige Konstruktion $T_{(H)}$ axiomatisiert eine konservative Henkin-Erweiterung von T.

Konservative Henkin-Erweiterungen

Beweis:

Nach Konstruktion axiomatisiert $T_{(H)}$ eine Henkin-Theorie.

Damit muss nur noch die Konservativität gezeigt werden. Es ist also für jedes $\chi \in \mathfrak{L}$ zu zeigen: Wenn $T_{(H)} \vdash_{\mathfrak{L}_H} \chi$, dann $T \vdash_{\mathfrak{L}} \chi$.

Es gelte $T_{(H)} \vdash_{\mathfrak{L}_H} \chi$ für eine beliebige Formel $\chi \in \mathfrak{L}$.

Damit gibt es eine Ableitung $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{L}_H$ mit Endformel χ.

Seien $\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n$ alle neuen Konstanten von $\mathfrak{L}_H$, die irgendwo in $\mathfrak{D}$ vorkommen.

Ersetzt man diese durch Variablen $x_1, \ldots, x_n$, die alle nicht in $\mathfrak{D}$ vorkommen, so ist $\mathfrak{D}' \doteq_{\mathrm{def}} \mathfrak{D}[\vec{x}/\vec{c}]$ nach n-facher Anwendung des Lemmas 12.5 (Konstanten-Ersetzung) eine gültige Ableitung.

Konservative Henkin-Erweiterungen

Für $\mathfrak{D}'$ gilt:

1. In $\mathfrak{D}'$ kommen nur Formeln aus $\mathfrak{L}$ vor. Also ist $\mathfrak{D}'$ eine $\mathfrak{L}$-Ableitung.
2. Die Endformel ist χ, da $\chi[\vec{x}/\vec{c}] = \chi$.
3. Für jede Formel $\psi \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}')$ gilt entweder $\psi \in T$ oder $\psi \doteq \exists x\phi(x) \to \phi(y)$, wobei y in keiner anderen Formel $\psi' \in \mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}')\setminus\{\psi\}$ vorkommt.

   Da $\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}')$ endlich ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt:

$$\mathrm{Hyp}(\mathfrak{D}') = N \uplus M \quad (\star)$$

   wobei $N \subseteq T$ und $M = \{\exists x\phi_k \to \phi_k(y_k) : \ 1 \leq k \leq n\}$ mit $T \cap M = \varnothing$.

Konservative Henkin-Erweiterungen

Durch sukzessive Elimination von Annahmen $\psi \in M$, läßt sich zeigen: $N \vdash \chi$.

Sei $\psi \doteq \exists x \phi(x) \to \phi(y) \in M$ beliebig, $X =_{\mathrm{def}} (N \uplus M) \setminus \{\psi\}$.

Mit Einführung der Implikation folgt aus $(\star)$: $X \vdash \psi \to \chi$.

D.h.: $X \vdash (\exists x \phi(x) \to \phi(y)) \to \chi$.

Da y nun in keiner Annahme mehr vorkommt, folgt:
$X \vdash \forall y \big((\exists x \phi(x) \to \phi(y)) \to \chi \big)$.

Da $\forall y(\sigma \to \tau) \vdash \exists y \sigma \to \tau$, gilt auch:
$X \vdash \exists y \big(\exists x \phi(x) \to \phi(y) \big) \to \chi$.

Daraus und aus $\vdash \exists y (\exists x \phi(x) \to \phi(y))$ ergibt sich mit $(\to E)$:
$X \vdash \chi$.

Konservative Henkin-Erweiterungen

Somit wurde gezeigt: $(N \uplus M) \setminus \{\psi\} \vdash \chi$.

Damit ist ψ aus der Annahmenmenge eliminiert.

Durch Iteration der Elimination erhält man: $N \vdash \chi$.

Da $N \subseteq T$, ist die Konservativität gezeigt. $\square$

Konservative Henkin-Erweiterungen

Korollar 9 (Widerspruchsfreiheit)

T ist genau dann konsistent, wenn $T_{(H)}$ konsistent ist.

Beweis:

Direkte Folge aus der Konservativität von $T_{(H)}$. □

Satz von Lindenbaum

Proposition 10 (Satz von Lindenbaum)

Jede widerspruchsfreie Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$ läßt sich zu einer vollständigen widerspruchsfreien Theorie $T' \subseteq \mathfrak{L}$ erweitern.

<u>Beweis:</u>

$(*)$ Im Beweis ist vorausgesetzt, dass die Menge der Prädikatzeichen, Funktionszeichen und Individuen-Konstanten in der Sprache $\mathfrak{L}$ abzählbar sind.

Setzt man $(*)$ nicht voraus, benötigt man das mit dem Auswahlaxiom äquivalente Zornsche Lemma.

Satz von Lindenbaum

Damit ist die Sprache $\mathfrak{L}$ selbst abzählbar und der Beweis verläuft analog zum Beweis in der Aussagenlogik, dass konsistente Mengen immer in einer maximal-konsistenten Menge enthalten sind:

1. Konstruktion einer neuen Aussagenmenge: Man folgt der Abzählung der Sprache und nimmt diejenigen Aussagen in die Menge auf, die die Konsistenz erhalten.
2. Nachweis der Vollständigkeit und Konsistenz der resultierenden Menge.
3. Nachweis der deduktiven Abgeschlossenheit der resultierenden Menge.

$\square$

Vervollständigung einer Henkin-Theorie

Lemma 11

Sei T_H die Vervollständigung einer widerspruchsfreien Henkin-Theorie $T_{(H)}$. Dann ist T_H selbst eine Henkin-Theorie.

Beweis:

Trivial, da schon in $T_{(H)} \subseteq T_H$ alle notwendigen Aussagen $\exists x\, \phi(x) \to \phi(\dot{c})$ für ein $\dot{c}$ enthalten sind. $\square$

Modell-Existenz-Satz

Theorem 12 (Modell-Existenz-Satz)

Sei $T_H \subseteq \mathfrak{L}_H$ eine vollständige, widerspruchsfreie Henkin-Erweiterung einer Theorie $T \subseteq \mathfrak{L}$.

Dann hat T_H ein Modell, und damit hat auch schon T ein Modell.