Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 4

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2012**

Aufgabe 14 (2 Punkt)

Zeigen Sie, daß $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 15 (6 Zusatzpunkte)

Eine n-stelliges Konnektiv mit Wahrheitsfunktion f heiße *selbstdual* genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = f(x_1, \ldots, x_n)^*.$$

Dabei sei $0^* := 1$ und $1^* := 0$.

Zeigen Sie, dass eine Menge, welche nur selbstduale Konnektive enthält, nicht funktional vollständig sein kann.

Aufgabe 16 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen mithilfe algebraischer Umformungen. Sie dürfen dabei die logischen Äquivalenzen aus dem Theorem über algebraische Gesetze (5.1) und $\varphi \to \psi \dashv\models \neg\varphi \vee \psi$ verwenden. Geben Sie dabei in jedem Schritt an, welche dieser Äquivalenzen Sie verwenden. Falls Sie dabei den Substitutionssatz (Theorem 3.3) verwenden, geben Sie dies auch an.

a) $\varphi \to (\theta \to \psi) \dashv\models \varphi \wedge \theta \to \psi$

b) $\varphi \vee \psi \to \sigma \dashv\models (\varphi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma)$

Aufgabe 17 (2+2+2 Punkte)

Konstruieren Sie für die folgenden Formeln jeweils kunjunktive und disjunktive Normalformen. Verwenden Sie hierfür wieder die Theoreme 3.3, 4.3 und 5.1. Geben Sie alle Zwischenschritte der Konstruktionen an.

a) $\neg(p_1 \leftrightarrow p_2)$

b) $((p_1 \to p_2) \to p_2) \to p_2$

c) $(p_1 \to (p_1 \wedge \neg p_2)) \wedge (p_2 \to (p_2 \wedge \neg p_1))$

Aufgabe 18 (2+2 Punkte)

Geben Sie jeweils ein einfaches Verfahren zur Überprüfung der folgenden Eigenschaften an, und begründen Sie, warum das Verfahren das Gewünschte leistet.

a) Erfüllbarkeit einer Formel in disjunktiver Normalform.

b) Allgemeingültigkeit einer Formel in konjunktiver Normalform.

Abgabe der Aufgaben am Do. 24.05.2012 nach der Vorlesung
oder als PDF auf der Webseite der Veranstaltung.