Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 9

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2012**

Aufgabe 35 (3 + 3 + 3 Punkte)

Die Sprache $\mathcal{L}$ umfasse ein einstelliges Funktionszeichen f und ein zweistelliges Funktionszeichen g. Wir betrachten drei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ über der Menge $\mathbb{N}$ und interpretieren g überall durch die Addition und f in $\mathfrak{A}_1$ durch die Abbildung $n \mapsto 2$, in $\mathfrak{A}_2$ durch $n \mapsto \min(n^2 + 2, 19)$ und in $\mathfrak{A}_3$ durch $n \mapsto n \bmod 4$.

Prüfen Sie durch formelle Auswertung, welche der folgenden Formeln in welchen Strukturen gültig sind:

a) $\forall x \forall y (f(g(x, y)) = f(x))$

b) $\forall x \exists y (f(g(x, y)) = f(x))$

c) $\exists y \forall x (f(g(x, y)) = f(x))$

Aufgabe 36 (2 + 4 + 2 Punkte)

Seien φ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln, sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

a) Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$, dann folgt aus $\mathfrak{A} \models \varphi$ stets auch $\mathfrak{A} \models \psi$.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von a) nicht allgemein gilt (Gegenbeispiel und Nachweis, dass es ein Gegenbeispiel ist).

c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von a) gilt, sofern φ und ψ geschlossene Formeln sind (d.h. sofern $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) = \emptyset$).

Aufgabe 37 (6 Punkte)

Überprüfen Sie, ob für eine beliebige Formel φ die Formel $\exists x(\forall x \varphi \lor \neg\varphi)$ allgemeingültig ist. (Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis!)

Aufgabe 38 (2+2+3 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie den Satz 10.7 aus dem Skript. Geben Sie zudem unter 10.7 (3) eine Formel φ an mit $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Abgabe der Aufgaben am Do. 05.07.2012 nach der Vorlesung oder als PDF im Internet.