Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 12

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2012**

Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Geben Sie den Gliederungsbaum, sämtliche Teilaussagen sowie den Rang dieser Aussage an:

$$\neg(p_1 \to ((\neg p_3 \wedge p_1) \vee p_2)) \to p_3$$

Aufgabe 2

Ermittlen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3)$$

Aufgabe 3

Die zweistellige Aussagenlogische Verknüpfung $\star$ werde durch die Funktion $f_\star$ mit der folgenden Wahrheitstafel interpretiert:

x	y	$f_\star(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Warum ist $\star$ nicht funktional vollständig?

Aufgabe 4

Geben Sie für die folgende Formel eine Formel in konjunktiver Normalform an:

$$\varphi \to (\neg\psi \wedge \varphi)$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

$$\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Eine konsistente Menge aussagenlogischer Formeln Γ ist maximal konsistent genau dann, wenn für jedes φ gilt: entweder $\varphi \in \Gamma$ oder $\neg\varphi \in \Gamma$.

Aufgabe 7

Erläutern Sie:

- Wann heißt eine Aussagenmenge maximal konsistent?
- Wie konstruiert man zu einer konsistenten Aussagenmenge eine maximal konsistente Erweiterung?
- Zeigen Sie: $\varphi \to \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Formelmenge enthalten, wenn nicht zugleich φ und $\neg\psi$ darin enthalten sind.

Aufgabe 8

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, |\cdot|, -, 1 \rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$ und $v(x_2) = -1$. Werten Sie schrittweise aus:

$$[\![(x_1 - 1)^2 - |x_2|]\!]_v$$

Aufgabe 9

Geben Sie für folgende Formel eine Formel in pränexer Normalform an:

$$\neg \forall x \varphi(x) \to \exists x(\varphi(x) \to \forall y \varphi(y))$$

Aufgabe 10

Zeigen Sie:

$$\models \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi \vee \exists x \psi$$

Aufgabe 11

Zeigen Sie:

$$\vdash_{\mathrm{NK}} \exists x \exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi(x, y)$$

Aufgabe 12

Es seien T_1 und T_2 Theorien. Zeigen Sie:

1. $T_1 \cap T_2$ ist ebenfalls eine Theorie.
2. $T_1 \cup T_2$ ist im allgemeinen keine Theorie. (Gegenbeispiel!)

Aufgabe 13

Es sei T eine vollständige Henkin-Theorie. Weiterhin sei $\varphi(x)$ eine Formel mit x als einziger freier Variable. Zeigen Sie: Falls $\varphi(t) \in T$ für jeden geschlossenen Term t, dann auch $\forall x \varphi(x) \in T$.

Aufgabe 14

Erläutern Sie:

- Was ist eine Theorie?
- Was ist eine Henkin-Theorie?
- Was besagt der Kompaktheitssatz? Beweisen Sie ihn mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes!
- Was besagen die Sätze von Löwenheim-Skolem?
- Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her!