Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 3

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie die funktionale Vollständigkeit der Menge $\{|\}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Geben Sie zu der Formel $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \bot$ eine logisch äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der Sheffer-Strich $|$ vorkommt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\wedge, \vee\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Durch die folgende Wahrheitstafel wird ein 3-stelliger Junktor \$ definiert:

φ_3	φ_2	φ_1	$\$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Konstruieren Sie gemäß dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (s. Skript S. 23) mit Hilfe der Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\bot$ eine Formel, die \$ ausdrückt.

Aufgabe 5 (4 Zusatzpunkte)

Für eine Belegung v, eine Aussagevariable p und einen Wahrheitswert $b \in \{0, 1\}$ sei die Belegung $v[p \mapsto b]$ wie folgt definiert:

$$v[p \mapsto b](p_i) = \begin{cases} b & \text{falls } p_i \doteq p, \\ v(p_i) & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Wir nennen $v[p \mapsto b]$ die p-*Variante* von v.)

Beweisen Sie, dass für alle Formeln φ, ψ, alle Aussagevariablen p und alle Belegungen v folgendes gilt: $[\![\varphi[\psi/p]]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v[p \mapsto [\![\psi]\!]_v]}$.

Abgabe der Aufgaben am 22.11. nach der Vorlesung oder als PDF.