Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 7

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 Punkte)

Betrachten Sie die Signatur $\langle\{1 \mapsto 2\}, \{2 \mapsto 2\}, \{3\}\rangle$ und die zugehörige formale Sprache $\mathcal{L}$. Geben Sie eine kurze Begründung an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um Terme oder Formeln von $\mathcal{L}$ handelt (es gelten die Konventionen zur Klammerersparnis):

(a) $\dot{c}_1 \wedge x_1 \to x_0$

(b) $\exists x_0 \dot{R}_2(\dot{f}_1(x_0, x_0), \dot{f}_1(x_0, x_0))$

(c) $x_0 = c_3 \not\equiv x_0 = \dot{f}_1(c_3, c_3)$

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Geben Sie jeweils ein Alphabet für Sprachen folgender Signaturen an. Geben Sie ferner in jedem Fall sowohl eine offene als auch eine geschlossene Formel an, in der alle nichtlogischen Zeichen der Sprache vorkommen. Falls vorhanden, bestimmen Sie zudem für jede Signatur einen offenen und einen geschlossenen Term.

(a) $\langle\{\pi \mapsto 2, \pi^2 \mapsto 1\}, \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 2\}, \emptyset\rangle$

(b) $\langle\emptyset, \{4 \mapsto 1\}, \emptyset\rangle$

(c) $\langle\{2 \mapsto 1\}, \emptyset, \{0, 1\}\rangle$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Geben Sie zu jeder der in Aufgabe 2 definierten Sprachen $\mathcal{L}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur an (d.h. geben Sie Strukturen an, welche die in Aufgabe 2 angegebenen Signaturen haben).

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 Punkte)

Gegeben sei die Sprache der Signatur $\langle\{+ \mapsto 2\}, \{\leq \mapsto 2\}, \{1\}\rangle$ und eine entsprechende Struktur $\mathfrak{A} = \langle\mathbb{N}, +, \leq, 1\rangle$. Wir schreiben $\dot{+}$, $\dot{\leq}$, $\dot{1}$ für $\dot{f}_+$, $\dot{R}_\leq$, $\dot{c}_1$ und verwenden Infix-Notation. Sei v eine Belegung mit $v(x_0) = 2, v(x_1) = 5$. Bestimmen Sie durch schrittweises Auswerten den Wert von:

(a) $[\![((\dot{1} \dot{+} \dot{1}) \dot{+} x_0) \dot{+} x_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

(b) $[\![((x_0 \dot{+} x_1) \dot{\leq} (\dot{1} \dot{+} x_1)) \vee ((\dot{1} \dot{+} \dot{1}) \dot{\leq} x_0) \to \neg(\dot{1} \dot{\leq} x_0)]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

(c) $[\![(\exists x_0(\forall x_1(x_0 \dot{\leq} x_1)))]\!]_v^{\mathfrak{A}}$

Abgabe der Aufgaben am 20.12. nach der Vorlesung oder als PDF.