Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 5**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Drücken Sie folgende Quantoren mittels $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ und $=$ aus:

a) Es gibt weniger als drei Objekte, die die Eigenschaft ϕ haben.

b) Es gibt kein Objekt, das die Eigenschaft ϕ hat.

c) Es gibt entweder genau ein Objekt, das die Eigenschaft ϕ hat, oder gar keines.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \times, \leq, 0, 1 \rangle$. Geben Sie eine prädikatenlogische Formel an, die folgenden Sachverhalt in der Struktur $\mathcal{N}$ ausdrückt:

"Wenigstens eine der Zahlen y und z ist positiv, und x ist ihr größter gemeinsamer Teiler."

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln unter der Voraussetzung, daß x nicht frei in ψ vorkommt.

a) $(\exists x \phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$

b) $(\psi \rightarrow \forall x \phi) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \phi)$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen gelten für alle Formeln ϕ und ψ und für alle Strukturen $\mathfrak{M}$? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

a) Wenn mit $\mathfrak{M} \models \phi$ auch $\mathfrak{M} \models \psi$, dann gilt $\mathfrak{M} \models \phi \rightarrow \psi$.

b) Wenn $\mathfrak{M} \models \phi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$, dann gilt auch $\mathfrak{M} \models \phi \wedge \psi$.

c) Wenn $\mathfrak{M} \models \phi$ oder $\mathfrak{M} \models \psi$, dann gilt auch $\mathfrak{M} \models \phi \vee \psi$.

d) Wenn $\mathfrak{M} \models \phi \vee \psi$, dann gilt auch $\mathfrak{M} \models \phi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$.