Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 6**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\phi \doteq P(f(x,y)) \to Q(f(g(y), f(x,x)))$. Geben Sie die Resultate folgender Substitutionen an.

a) $\phi \left({}^{x}\!/_{f(x,y)} \right)$

b) $(\phi\, ({}^{y}\!/_{x}))\left({}^{x}\!/_{f(c)} \right)$

c) $\phi \left({}^{y}\!/_{g(x)}, {}^{x}\!/_{y} \right)$

d) $\left(\phi \left({}^{y}\!/_{f(x,x)}, {}^{x}\!/_{c} \right) \right) \left({}^{x}\!/_{g(y)} \right)$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig? Begründen Sie jeweils Ihre Behauptung.

a) $(\forall x \phi \wedge \exists x \psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$

b) $\exists x(\phi \vee \psi) \to (\exists x \phi \vee \exists x \psi)$

c) $\forall x(\phi \vee \psi) \to (\forall x \phi \vee \forall x \psi)$

d) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x \phi \to \exists x \psi)$

e) $(\forall x \phi \vee \exists x \psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Formeln eine logisch äquivalente Formel in pränexer Normalform an.

a) $\forall x(\forall y P(y, f(x,u)) \to \exists y P(f(y,u), x))$

b) $\forall u(\forall v \exists w P(f(v,x), f(u,w)) \to \exists w \forall u P(f(v,w), f(u,w)))$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für eine Menge Σ von Formeln sei $F(\Sigma) = \{\phi \mid \Sigma \models \phi\}$ die Menge aller Folgerungen aus Σ. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

a) Wenn $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, dann $F(\Sigma_1) \subseteq F(\Sigma_2)$.

b) $F(\Sigma) = F(F(\Sigma))$.