# Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II — Blatt 3

**Prof. Dr. P. Schroeder-Heister** **SS 2009**

---

## Aufgabe 1

Geben Sie eine Heyting-Algebra an, die ein Modell von $(p \to q) \vee (q \to p)$ ist. (Diese Formel charakterisiert die Dummettsche Logik LC, ein intermediäres System zwischen intuitionistischer und klassischer Logik.)

## Aufgabe 2

Geben Sie erststufige Relationseigenschaften (ggf. mit Identität) an, die folgenden modallogischen Axiomen entsprechen:

a) $p \to \Box\Diamond\Diamond p$

b) $(\Box p \wedge p) \to \Box\Box p$

c) $\Diamond p \leftrightarrow \Box p$

## Aufgabe 3

Geben Sie modallogische Formeln an, die folgenden erststufigen Eigenschaften entsprechen:

a) $\forall xyz(xRy \wedge xRz \to y = z)$ (Rechtseindeutigkeit)

b) $\forall xy(xRy \to \exists z(xRz \wedge zRy))$ (Dichte)

c) $\forall xyz(xRy \wedge xRz \to \exists u(yRu \wedge zRu))$ (Church-Rosser)

## Aufgabe 4

Gegeben sei folgende Übersetzung der Formeln der intuitionistischen Logik in die Modallogik:

$\phi' \stackrel{\text{def}}{=} \Box\phi$, falls $\phi$ Aussagenvariable

$\bot' \stackrel{\text{def}}{=} \bot$

$(\phi \vee \psi)' \stackrel{\text{def}}{=} \phi' \vee \psi'$

$(\phi \wedge \psi)' \stackrel{\text{def}}{=} \phi' \wedge \psi'$

$(\phi \to \psi)' \stackrel{\text{def}}{=} \Box(\phi' \to \psi')$

Zeigen Sie, daß für jede Formel $\phi$ gilt: $\phi$ ist allgemeingültig in der intuitionistischen Logik genau dann, wenn $\phi'$ allgemeingültig in S4 ist.