PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 2

Aufgabe 5: Geben Sie eine rekursive Definition der Länge (Anzahl der vorkommenden Zeichen) einer Formel $\phi \in$ PROP an und bestimmen Sie dann die Länge der Formel $\neg p \wedge \neg q \to p$. (Hinweis: die nicht explizit hingeschriebenen Klammern müssen mitgezählt werden.)

Zeigen Sie dann durch Induktion über den Aufbau von Formeln, dass Formeln, in denen höchsten die Konjunktion und Disjunktion als Junktor vorkommen, immer für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Länge $4n + 1$ haben. Geben Sie hierfür zunächst die Induktionsbasis und die Form der zusammengesetzten Formeln an.

Aufgabe 6: Geben Sie zwei Belegungen v, w an, so dass alle Formeln, in denen höchstens die Konjunktion oder die Disjunktion als Junktor vorkommen, mit 0 bzw. mit 1 bewertet werdem. Zeigen Sie dieses dann mit einer Induktion über den Aufbau von Formeln.

Gibt es in einer Sprache, in der nur die Junktoren Konjunktion und Disjunktion vorkommen, Tautologien? Welche Formeln einer solchen Sprache sind erfüllbar, welche kontingent und welche kontradiktorisch?

Aufgabe 7: Geben sie einen rekursiven Algorithmus $\textsc{Semantik}(v, \phi)$ in einem Pseudocode an, der die Bewertung von Formeln $\phi \in$ PROP unter der Belegung v zurückgibt. Definieren Sie dazu eigene einfache Zugriffsmethoden (etwa: „if $\textsc{Atom}(\phi)$ then …“ oder „$\textsc{LinkeTeilformel}(\phi)$“) und beschreiben Sie diese nötigenfalls kurz.

Aufgabe 8: Prüfen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Formeln und Formelschemata Tautologien, Kontradiktionen oder kontingente Formeln sind.

(a) $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$ (b) $\neg(\neg p \wedge p \to \bot)$
(c) $(p_1 \to p_2) \vee p_3$ (d) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

(Halten Sie sich beim Aufbau der Wahrheitstafeln an das Beispiel auf S.15 im Skript; beachten Sie insbesondere eine sinnvolle Reihenfolge der Zeilen.)

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe): Bestimmen Sie die Anzahl aller 2-stelligen Wahrheitsfunktionen. Geben Sie dann Beispiele an, in denen die umgangssprachlichen Verknüpfungen „und“, „oder“ und „wenn, dann“ nicht (!) wie die entsprechenden Junktoren verwendet werden. (Begründen Sie dies kurz.) Argumentieren Sie dann, warum es keinen Junktor gibt, der das umgangssprachliche „weil“ repräsentiert.

Abgabe der Aufgaben am Do. 3.11.2009 nach der Vorlesung