Übungen zur Mathematischen Logik I
Blatt 3

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass die 2-stellige Relation $\phi \models \psi$ auf PROP reflexiv, transitiv, aber nicht symmetrisch ist. Zeigen Sie zudem, dass für alle Belegungen v gilt: $[\![\phi \to \psi]\!]_v = 1$ genau dann, wenn $[\![\phi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$.

Argumentieren Sie hier mit Belegungen wie etwa in Lemma 2.9.

DEF: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ beliebige Aussagenmenge.

$$\text{Cn}(\Gamma) := \{\phi \in \text{PROP};\ \Gamma \models \phi\}$$

heißt die *Menge aller Konsequenzen* aus Γ.

Aufgabe 11: Zeigen Sie, dass Cn die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $\text{Cn}(\bot) = \text{PROP}$ und $\text{Cn}(\top) = \text{Taut}$
(b) $\Gamma \subseteq \Delta \quad \Rightarrow \quad \text{Cn}(\Gamma) \subseteq \text{Cn}(\Delta)$ (Monotonie)
(c) $\text{Cn}(\Gamma) = \text{Cn}(\text{Cn}(\Gamma))$ (Abgeschlossenheit)

Zeigen Sie, dass im Allgemeinen die Gleichung $\text{Cn}(\Gamma[q/p]) = \text{Cn}(\Gamma)[q/p]$ falsch ist. Dabei ist $\Gamma[q/p] := \{\phi[q/p];\ \phi \in \Gamma\}$.

Aufgabe 12: Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, dass für alle Formeln $\phi, \psi \in \text{PROP}$ die folgenden logischen Äquivalenzen gelten:

(a) $\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ (De Morgan)
(b) $\phi \to \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg\psi \to \neg\phi$ (Kontraposition)
(c) $\top \mathrel{=\!\!|\!\!\models} ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$ (Peirce'sche Tautologie)

Aufgabe 13: Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen von Junktoren funktional vollständig sind. Beweisen Sie Ihre Antwort.

(a) $\mathfrak{J}_1 = \{\wedge, \vee\}$ (b) $\mathfrak{J}_2 := \{\vee\}$
(c) $\mathfrak{J}_3 := \{\neg, \vee\}$ (d) $\mathfrak{J}_4 := \{\downarrow\}$
(e) $\mathfrak{J}_5 = \{\neg, \leftrightarrow\}$ (Zusatzaufgabe)

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse das Satzes 4.4 über funktionale Vollständigkeit und die der Aufgabe 6, Blatt 2.

Abgabe der Aufgaben am Do. 12.11.2009 nach der Vorlesung