Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik Blatt 14

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **WS 2008/09**

Die Aufgaben aus der Zwischenklausur:

Aufgabe 1

Geben Sie disjunktive und konjunktive Normalformen für diese Aussage an:

$$(p_1 \to p_5) \vee (\neg p_2 \wedge (p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_4)))$$

Aufgabe 2

Geben Sie eine nur die logischen Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ benutzende Aussage φ an, welche die unten stehende Wahrheitstafel besitzt. Sie dürfen dabei folgende Äquivalenzen benutzen:

$$\begin{array}{lcl} \psi \wedge \bot & \dashv\models & \bot \\ \psi \vee \top & \dashv\models & \top \\ \psi \wedge \top & \dashv\models & \psi \\ \psi \vee \bot & \dashv\models & \psi \end{array}$$

ϕ_3	ϕ_2	ϕ_1	ϕ
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Aufgabe 3

Leiten Sie in NK her:

a) $\neg p \to p \vdash p$

b) $\neg \phi, \neg \psi \vdash \neg(\phi \vee \psi)$

Aufgabe 4

Formulieren Sie den Vollständigkeitssatz, den Endlichkeitssatz und den Kompaktheitssatz. Leiten Sie den Endlichkeitssatz aus dem Vollständigkeitssatz her.

Aufgabe 5

Wir betrachten den Kalkül NK und Formeln über $\wedge$, $\vee$, $\to$ und $\bot$. Sei Δ eine maximal konsistente Menge. Zeigen Sie: $\phi \vee \psi \in \Delta$ genau dann, wenn ($\phi \in \Delta$ oder $\psi \in \Delta$).

Die Aufgaben aus der Klausur des vergangenen Jahres:

Aufgabe 1

Geben Sie zu dieser Aussage sämtliche Teilaussagen und deren jeweiligen Rang an:

$$\neg(p \to (\neg(\neg r \lor p) \lor q)) \to (r \land q)$$

Aufgabe 2

Geben Sie disjunktive und konjunktive Normalformen für diese Aussage an:

$$\neg(p \to (\neg(\neg r \lor p) \lor q)) \to (r \land q)$$

Aufgabe 3

Geben Sie eine nur die logischen Zeichen $\land, \lor, \to$ und $\bot$ benutzende Aussage ϕ an, welche die folgende Wahrheitstafel besitzt:

p	q	r	ϕ
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Aufgabe 4

Leiten Sie in NK her:

a) $p \to q, r \to \neg q \vdash \neg(p \land r)$

b) $p \to r, q \to s \vdash p \lor q \to r \lor s$

Aufgabe 5

Beweisen Sie: $\phi \land \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Aussagenmenge enthalten, wenn ϕ und ψ darin enthalten sind.

Aufgabe 6

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, \times, + \rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = -1$ und $v(x_3) = 1$. Werten Sie schrittweise aus:

$$[\![(x_1 \times x_2)^2 + x_3]\!]_v^{\mathfrak{A}}$$

Aufgabe 7

Es sei ϕ eine Formel, welche die Variablen x_1, x_2 und x_3 frei enthalte. Zeigen Sie:

$$\models \exists x_1 \forall x_2 \phi(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 \phi(x_1, x_2)$$

Aufgabe 8

Geben Sie eine zu der folgenden Formel äquivalente Formel in pränexer Normalform an:

$$\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists x P(x, x)$$

Aufgabe 9

Leiten Sie in NK her:

a) $\forall x \neg \phi(x) \rightarrow \neg \forall x \phi(x)$

b) $\neg \forall x \phi(x) \rightarrow \exists x \neg \phi(x)$ [Bemerkung: In NK ist $\exists$ ein Grundzeichen.]

Aufgabe 10

Wann ist eine Aussagenmenge widerspruchsfrei? Was besagt der Modellexistenzsatz? Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her.

Aufgabe 11

Was besagt der Kompaktheitssatz? Beweisen Sie ihn aus dem Vollständigkeitssatz.

Aufgabe 12

Gegeben sei eine Sprache mit einem einstelligen Funktionszeichen als einziger Konstante. Gilt folgendes (Begründung)?

a) $\models \exists x(\exists y(x = f(y)) \rightarrow \exists y(f(f(z)) = f(y)))$

b) $\models \exists x(\exists y(x = f(y)) \rightarrow \exists y(f(f(y)) = f(y)))$

Einige weitere Aufgaben:

Aufgabe 1

Erläutern Sie:

- Was ist eine Theorie?
- Was ist eine Henkin-Theorie?
- Was besagt der Kompaktheitssatz?
- Was besagen die Sätze von Löwenheim-Skolem?

Aufgabe 2

Zeigen Sie: $\mathrm{MOD}(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \mathrm{MOD}(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$.

Aufgabe 3

Es sei $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von Theorien, welche durch strikte Mengeninklusion linear geordnet ist. Zeigen Sie, daß $T = \bigcup \{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4

Wenn T_1 und T_2 Theorien sind mit $\mathrm{MOD}(T_1 \cup T_2) = \emptyset$, dann gibt es ein ϕ mit $T_1 \models \phi$ und $T_2 \models \neg \phi$.