Universität Tübingen, WSI
Prof. Dr. P. Schroeder-Heister

Sommersemester 2002
Übungsblatt 1

Übungen zur Vorlesung λ-Kalkül und kombinatorische Logik

Aufgabe 1

(a) Geben Sie alle Teilterme, freien und gebundenen Variablen der folgenden λ-Terme an.

(b) Welche der λ-Terme besitzen eine β-Normalform, und wie sieht diese aus?

(c) Welche der λ-Terme sind β-gleich?

- i) $\lambda y.z$
- ii) $(\lambda y.yy)(\lambda x.xx)$
- iii) $(\lambda yx.xy)((\lambda z.z)y)(\lambda xz.x)$
- iv) $(\lambda xyz.xz)((\lambda zy.yy)z)((zz)(zz))(\lambda x.xx)$
- v) $(\lambda y.x)[y/x]$

Aufgabe 2

Beweisen Sie *mit Induktion über Termaufbau* die folgende Aussage:

Für alle λ-Terme M gilt:

$$\#\mathsf{FV}(M) \leq \mathsf{lgh}(M),$$

d.h. die Anzahl der freien Variablen von M ist kleiner gleich der Länge von M.

Bemerkung: Die Aussage ist offensichtlich trivial; Ziel dieser Aufgabe ist es, einen sauberen Beweis über Termaufbau zu führen.

Aufgabe 3

(a) Geben Sie λ-Terme M und P an, für die gilt:

$$(\lambda y.M)[P/x] \not\equiv \lambda y.(M[P/x]).$$

(b) Läßt sich die letzte Aussage auch zeigen, wenn P oder M ein *Kombinator*, d.h. ein geschlossener λ-Term ist?

(c) Beweisen Sie für alle λ-Terme P, Q und M:

$$(M[Q/x])[P/x] \equiv M[(Q[P/x])/x].$$