

Prof. Dr. Peter Schroeder-Heister

Dr. Kai F. Wehmeier

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß das Junktorensystem $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \supset, \&, +\}$ im dreiwertigen Fall nicht funktional vollständig ist.

Dabei sei $f_{\wedge} = \mathbf{et}_1$, $f_{\vee} = \mathbf{vel}_1$, $f_{\rightarrow} = \mathbf{seq}_1$, $f_{\neg} = \mathbf{non}_1$, $f_{\supset} = \mathbf{seq}_2$, $f_{\&} = \mathbf{et}_2$ und $f_{+} = \mathbf{vel}_2$. (4)

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, daß jede Instanz der folgenden Schemata eine \mathbf{L}_3 -Tautologie ist:

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (1)

(ii) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (1)

(iii) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (1)

(iv) $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$ (2)

(b) Geben Sie das kleinste $n > 3$ an, so daß $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$ nicht \mathbf{L}_n -tautologisch ist (mit Beweis). (2)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß jede Instanz der folgenden Schemata eine \mathbf{L}_{∞} -Tautologie ist:

(a) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (1)

(b) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (1)

(c) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (1)

(d) $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ (2)