

Mathematische Logik I

Blatt 3

Aufgabe 8: Betrachten Sie die binäre Relation $\phi \models \psi$ auf der Menge PROP. Zeigen Sie, dass diese Relation reflexiv und transitiv ist, nicht aber symmetrisch. Beweisen Sie anschließend die folgende Ungleichung für beliebige Belegungen v :

$$\llbracket \phi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v \quad \Leftrightarrow \quad \llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$$

Argumentieren Sie in dieser Aufgabe mit Belegungen und Bewertungen; verwenden Sie keine Wahrheitstabeln.

Aufgabe 9: Beweisen Sie die folgenden (metasprachlichen) Aussagen:

1. Genau dann gilt $\models \phi$ und $\models \psi$, wenn $\models \phi \wedge \psi$.
2. Gilt $\models \phi$ oder $\models \psi$, dann auch $\models \phi \vee \psi$. Die Umkehrung gilt nicht.
3. Es gilt $\models (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$.
4. Es gelte $\phi \models \phi \wedge p$. Falls ϕ keine Kontradiktion ist, kommt p in ϕ vor.

Aufgabe 10 (Funktionale Vollständigkeit):

1. *Peirce'scher Pfeil:* Geben Sie drei Formeln ϕ_{\neg} , ϕ_{\wedge} und ϕ_{\vee} an, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
 - (a) In ϕ_{\neg} kommt höchstens p_1 als Aussagevariable vor, in ϕ_{\wedge} und ϕ_{\vee} höchstens p_1 und p_2 .
 - (b) Es wird höchstens der Peirce'sche Pfeil (\Downarrow) als Junktor verwendet.
 - (c) Es gelten die folgenden logischen Äquivalenzen:

$$\phi_{\neg} \models \neg p_1 \quad ; \quad \phi_{\wedge} \models p_1 \wedge p_2 \quad ; \quad \phi_{\vee} \models p_1 \vee p_2$$

Zeigen Sie anschließend mithilfe geeigneter Wahrheitstabeln, dass die von Ihnen angegebenen Formeln jeweils die geforderten Äquivalenzen erfüllen.

2. *Vollständigkeit:* Zeigen Sie, dass die Menge $\{\Downarrow\}$ eine funktional vollständige Menge von Junktoren ist. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass die Menge $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \neg\}$ funktional vollständig ist.
3. *Darstellbarkeit:* Stellen Sie den Peirce'schen Pfeil über der Junktorenmenge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ dar. Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die dies belegt.

Aufgabe 11 (Zweiter Versuch): Lösen Sie Aufgabe (3), Blatt 1, erneut.

Hinweis (Zweiter Versuch): Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt dann in die Bewertung ein.

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 7. Mai.