

## Mathematische Logik I

### Blatt 3

---

**Aufgabe 8:** Betrachten Sie die binäre Relation  $\phi \models \psi$  auf der Menge PROP. Zeigen Sie, dass diese Relation reflexiv und transitiv ist, nicht aber symmetrisch. Beweisen Sie anschließend die folgende Ungleichung für beliebige Belegungen  $v$ :

$$\llbracket \phi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v \quad \Leftrightarrow \quad \llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$$

Argumentieren Sie in dieser Aufgabe mit Belegungen und Bewertungen; verwenden Sie keine Wahrheitstabeln.

**Aufgabe 9:** Beweisen Sie die folgenden (metasprachlichen) Aussagen:

1. Genau dann gilt  $\models \phi$  und  $\models \psi$ , wenn  $\models \phi \wedge \psi$ .
2. Gilt  $\models \phi$  oder  $\models \psi$ , dann auch  $\models \phi \vee \psi$ . Die Umkehrung gilt nicht.
3. Es gilt  $\models (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi)$ .
4. Es gelte  $\phi \models \phi \wedge p$ . Falls  $\phi$  keine Kontradiktion ist, kommt  $p$  in  $\phi$  vor.

**Aufgabe 10 (Funktionale Vollständigkeit):**

1. *Peirce'scher Pfeil:* Geben Sie drei Formeln  $\phi_{\neg}$ ,  $\phi_{\wedge}$  und  $\phi_{\vee}$  an, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
  - (a) In  $\phi_{\neg}$  kommt höchstens  $p_1$  als Aussagevariable vor, in  $\phi_{\wedge}$  und  $\phi_{\vee}$  höchstens  $p_1$  und  $p_2$ .
  - (b) Es wird höchstens der Peirce'sche Pfeil ( $\Downarrow$ ) als Junktor verwendet.
  - (c) Es gelten die folgenden logischen Äquivalenzen:

$$\phi_{\neg} \models \neg p_1 \quad ; \quad \phi_{\wedge} \models p_1 \wedge p_2 \quad ; \quad \phi_{\vee} \models p_1 \vee p_2$$

Zeigen Sie anschließend mithilfe geeigneter Wahrheitstabeln, dass die von Ihnen angegebenen Formeln jeweils die geforderten Äquivalenzen erfüllen.

2. *Vollständigkeit:* Zeigen Sie, dass die Menge  $\{\Downarrow\}$  eine funktional vollständige Menge von Junktoren ist. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass die Menge  $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \neg\}$  funktional vollständig ist.
3. *Darstellbarkeit:* Stellen Sie den Peirce'schen Pfeil über der Junktorenmenge  $\{\wedge, \vee, \neg\}$  dar. Geben Sie eine Wahrheitstafel an, die dies belegt.

**Aufgabe 11 (Zweiter Versuch):** Lösen Sie Aufgabe (3), Blatt 1, erneut.

*Hinweis (Zweiter Versuch):* Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt dann in die Bewertung ein.

**Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 7. Mai.**