Prof. Schroeder-Heister **Sommersemester 2014**
René Gazzari **Universität Tübingen**

Mathematische Logik I

Blatt 11

Aufgabe 40: Wir erweitern das Alphabet einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ um den Quantor $\daleth$ (fast alle). Erweitern Sie die Definition 9.4 (Auswertung von Formeln) derart, dass $\daleth x\, \phi$ genau dann wahr ist, wenn höchstens endlich viele Elemente des Universums die durch ϕ beschriebene Eigenschaft nicht haben. Prüfen Sie anschließend die folgenden Behauptungen für beliebige Formeln $\phi \in \mathfrak{L}'$ der erweiterten Sprache:

(a) $\models \daleth x\phi(x) \to \exists x\phi(x)$
(b) $\mathfrak{A} \models \daleth x\phi(x) \wedge \daleth x\psi(x) \to \exists x(\phi(x) \wedge \psi(x))$, falls $\mathfrak{A}$ unendlich ist.
(c) $\mathfrak{A} \models \daleth x\phi(x) \wedge \daleth x\neg\phi(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}$ ist endlich.

Aufgabe 41: Es sei die Aussagenmenge

$$\Delta := \{\forall x(x = x), \forall xyz(x = y \wedge z = y \to x = z)\} \subseteq \mathfrak{L}$$

in einer beliebigen Sprache $\mathfrak{L}$ gegeben.
Zeigen Sie im Kalkül NK$'$ folgende Behauptungen über Ableitbarkeit:

(a) $\Delta \vdash \forall xy(x = y \to y = x)$
(b) $\Delta \vdash \forall xyz(x = y \wedge y = z \to x = z)$

Zeigen Sie anschließend im Kalkül NK$'_=$:

(c) $\vdash \forall z(x = z \to y = z) \leftrightarrow x = y$
(d) $\forall x(f(x) = g(x)) \vdash \forall x(f(f(x)) = g(g(x)))$

Hinweis: Im Kalkül NK$'$ gibt es keine Schlussregeln für die Gleichheit.

Aufgabe 42: Zeigen Sie im Kalkül NK:

(a) $\exists x(\phi(x) \wedge \psi) \vdash \exists x\phi(x) \wedge \psi$, sofern $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$
(b) $\vdash \forall x\phi(x) \to \neg\exists x\neg\phi(x)$
(c) $\vdash \neg\exists x\neg\phi(x) \to \forall x\phi(x)$

Hinweis: Im Kalkül NK ist der Quantor $\exists$ ein eigenständiges Zeichen mit eigenen Schlussregeln und insbesondere die Formel $\exists x\phi$ keine Abkürzung.

Aufgabe 43 (Zusatzaufgabe): Es sei PA wie auf Blatt 10 angegeben. Beweisen Sie die folgenden arithmetischen Aussagen:

(a) $\mathrm{PA} \vdash \forall z, x, y : (x + z = y + z \to x = y)$ (rechtsseitige Kürzung)
(b) $\mathrm{PA} \vdash \forall x, y : (x + y = y + x)$ (Kommutativität)

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 9. Juli.