Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 6**

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

a) $\{p_0 \to p_1,\ p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3,\ p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \ldots\}$

b) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

c) $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to \neg p_0\}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Eine Formel φ heiße *unabhängig* von der Menge Γ, falls $\Gamma \nvdash \varphi$ und $\Gamma \nvdash \neg\varphi$. Zeigen Sie, dass $p_1 \to p_2$ unabhängig von $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2,\ p_2 \to p_0\}$ ist.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

Eine Menge Γ heiße *vollständig*, falls für jede Formel φ entweder $\Gamma \vdash \varphi$ oder $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Zeigen Sie:

a) $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ ist vollständig.

b) Die Menge $\{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ ist maximal konsistent genau dann, wenn Γ vollständig ist.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie im Kalkül mit $\vee$ als Grundzeichen:

a) $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$

b) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi \vee \varphi) \to \psi \vee \sigma)$