Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 12**

Teil I: Aussagenlogik

Aufgabe 1

Geben Sie den Gliederungsbaum, sämtliche Teilaussagen sowie den Rang dieser Aussage an:

$$\neg(p_1 \to ((\neg p_3 \wedge p_1) \vee p_2)) \to p_3$$

Aufgabe 2

Ermittlen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3)$$

Aufgabe 3

Geben Sie für die folgende Formel eine Formel in konjunktiver Normalform an:

$$\varphi \to (\neg\psi \wedge \varphi)$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

$$\varphi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\varphi \to \sigma)$$

Aufgabe 5

Erläutern Sie:

- Wann heißt eine Aussage maximal konsistent?
- Wie konstruiert man zu einer Aussage eine maximal konsistente Erweiterung?
- Zeigen Sie: $\varphi \to \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Formelmenge enthalten, wenn nicht zugleich φ und $\neg\psi$ darin enthalten sind.

Teil II: Prädikatenlogik

Aufgabe 6

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, |\cdot|, -, 1\rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$ und $v(x_2) = -1$. Werten Sie schrittweise aus:

$$[\![\, (x_1 - 1)^2 - |x_2| \,]\!]^{\mathfrak{A}}_v$$

Aufgabe 7

Geben Sie für folgende Formel eine Formel in pränexer Normalform an:

$$\forall x \varphi(x) \leftrightarrow \exists x \varphi(x)$$

Aufgabe 8

Zeigen Sie:

$$\vDash \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x \varphi \vee \exists x \psi$$

Aufgabe 9

Zeigen Sie:

$$\vdash_{\mathrm{NK}} \exists x \exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi(x, y)$$

Aufgabe 10

Erläutern Sie:

- Was ist eine Theorie?
- Was ist eine Henkin-Theorie?
- Was besagt der Kompaktheitssatz?
- Was besagen die Sätze von Löwenheim-Skolem?

Aufgabe 11

Gegeben sei eine Sprache mit Gleichheit und den Konstantensymbolen c_1, c_2. Zeigen Sie, daß $\{\varphi \mid \exists xy(x \neq y) \vdash \varphi\} \cup \{c_1 \neq c_2\}$ *keine* Henkin-Theorie ist.