Mathematische Logik I — WS 2016/17

Übungsblatt 4 — Abgabe am 18.11. — T. Piecha

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Stellen Sie den Junktor

$$\text{if } p \text{ then } q \text{ else } r$$

über der Menge $\mathcal{K} = \{\wedge, \to, \neg\}$ dar.

Kann der Junktor auch anders verstanden werden? Geben Sie gegebenenfalls eine weitere Darstellung über $\mathcal{K}$ an, die zur vorherigen nicht logisch äquivalent ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Beweisen Sie die funktionale Vollständigkeit der Menge $\{\downarrow\}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Geben Sie zu der Formel $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to \bot$ eine logisch äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der Sheffer-Strich $|$ vorkommt.

Aufgabe 4 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge $\{\wedge, \vee\}$ nicht funktional vollständig ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Durch die folgende Wahrheitstafel wird ein 3-stelliger Junktor J definiert:

φ_3	φ_2	φ_1	$J(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Konstruieren Sie gemäß dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (s. Theorem 4.4) mithilfe der Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\bot$ eine Formel, die J darstellt.

Aufgabe 6 (6 Punkte)
Ein n-stelliger Junktor mit Wahrheitsfunktion f heiße *selbstdual* genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$ gilt:

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = f(x_1, \ldots, x_n)^*$$

Dabei sei $0^* := 1$ und $1^* := 0$.

Zeigen Sie, dass eine Menge, die nur selbstduale Junktoren enthält, nicht funktional vollständig sein kann.