

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Normalformen der folgenden Terme:

(a) $(\lambda u. \mathbf{R}0(\lambda uv. (\lambda xy. x)uv)u)\underline{2}$

(b) $(\lambda u. \mathbf{R}0(\lambda uv. (\lambda xy. y)uv)u)\underline{2}$

Dabei sei $\mathbf{R} \simeq_{\text{def}} \Theta(\lambda uxyz. \mathbf{D}x(y(\mathbf{V}z)(uxy(\mathbf{V}z)))z)$.

Hinweis: Reduzieren Sie Anwendungen von \mathbf{D} und \mathbf{V} gemäß Lemma 1.29, Fälle 2. und 3.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 Punkte)

Konstruieren Sie gemäß Kapitel 1.2 Kombinatoren, welche die folgenden (intuitiv definierten) rekursiven Funktionen realisieren.

(a) $\begin{aligned} mult(m, 0) &=_{\text{def}} 0 \\ mult(m, n + 1) &=_{\text{def}} add(m, mult(m, n)) \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} fakt(0) &=_{\text{def}} 1 \\ fakt(n + 1) &=_{\text{def}} mult(n + 1, fakt(n)) \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} non(0) &=_{\text{def}} 1 \\ non(n + 1) &=_{\text{def}} 0 \end{aligned}$

(d) $diff(m, n) =_{\text{def}} \begin{cases} m - n & \text{falls } m \geq n \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$

Hinweise:

- Geben Sie zunächst Definitionsgleichungen gemäß der Schemata für primitiv- bzw. partiell-rekursive Funktionen an.
- Die Funktion *add* ist im Skriptum bereits λ -definiert. Gegebenenfalls müssen weitere Hilfsfunktionen definiert werden.
- Die Differenz “−” ist nicht als rekursive Funktion zu verstehen, sondern als bekannte arithmetische Funktion, die lediglich zur Charakterisierung verwendet wird.

Aufgabe 3 (2+2+2 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie die Normalformen der folgenden Terme:

(a) $\underline{2}\underline{3}$

(b) $\lambda x. \underline{2}(\underline{3}x)$

(c) $\lambda xy. (\underline{2}x)((\underline{3}x)y)$

Geben Sie unter Verwendung Ihrer Beobachtungen Kombinatoren **Add**, **Mult**, **Exp** an, welche Addition, Multiplikation und Exponentiation auf Church-Ziffern realisieren, ohne den Rekursionskombinator zu verwenden.