Aufgabe 13

Wir betrachten die klassische Logik ohne $\vee$ und $\exists$. Es seien nichtatomare Anwendungen von RAA zugelassen. Eine *Maximalformel* ϕ (auch *Schnitt* genannt) sei definiert als Konklusion einer Anwendung einer Einführungsregel oder einer nichtatomaren Anwendung von RAA, die zugleich Hauptprämisse einer Beseitigungsregel ist. Geben Sie Kontraktionen an, die solche Maximalformeln eliminieren und erweitern Sie entsprechend den Beweis des Normalisierungssatzes.

Aufgabe 14

Wir betrachten wieder die klassische Logik ohne $\vee$ und $\exists$. Eine *Minimalformel* sei eine Formel ϕ, die Konklusion der Anwendung einer Beseitigungsregel und zugleich Prämisse der Anwendung einer Einführungsregel ist. Eine Ableitung ist in *erweiterter Normalform*, wenn sie weder Maximalformeln noch nichtatomare Minimalformeln enthält. Geben Sie Kontraktionen an, die dies sicherstellen und beweisen Sie einen entsprechenden Normalisierungssatz.

Aufgabe 15

Wir betrachten eine Sprache der naiven Mengenlehre mit $\rightarrow$ und $\perp$ als logischen Zeichen, in der zu jeder Formel $\phi(x)$ ein Term der Form $\{x : \phi(x)\}$ zur Verfügung steht. Wir betrachten folgende zusätzliche Einführungs- und Beseitigungsregeln:

$$\frac{\phi(t)}{t \in \{x : \phi(x)\}} \; \{\}I$$

$$\frac{t \in \{x : \phi(x)\}}{\phi(t)} \; \{\}E$$

Benutzen Sie r als Abkürzung für $\{x : (x \in x) \rightarrow \perp\}$.
Geben Sie eine Ableitung für $\perp$ (Russellsche Antinomie). Versuchen Sie, diese Ableitung zu normalisieren.