Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik — Blatt 13

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2008/09**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\{T_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Theorien, welche durch Mengeninklusion linear geordnet ist. Weiterhin sei $T = \bigcup\{T_i \mid i \in I\}$ Zeigen Sie:

a) T ist eine Theorie, die jede Theorie T_i erweitert.

b) Wenn jede Theorie T_i konsistent ist, dann ist auch T konsistent.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß im Beweis des MODell-Existenz-Theorems (12.12) die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ wohldefiniert ist, d.h. daß gilt: $t_1 \sim s_1, \ldots, t_n \sim s_n \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n})$.

b) Zeigen Sie, daß für jeden geschlossenen Term t gilt: $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}} = \bar{t}$.

Aufgabe 3 (5 + 2 Punkte)

Es seien Γ, Δ Mengen von $\mathcal{L}$-Aussagen und $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Klassen von $\mathcal{L}$-Strukturen. Es sei weiterhin $\mathrm{MOD}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$ und $\mathrm{Th}(\mathfrak{K}) = \{\phi \in \mathcal{L} : \mathfrak{K} \models \phi \text{ und } FV(\phi) = \emptyset\}$ (vgl. Def. 13.1). Zeigen Sie:

a) $\mathrm{MOD}(\Gamma \cup \Delta) = \mathrm{MOD}(\Gamma) \cap \mathrm{MOD}(\Delta)$,

b) $\mathrm{Th}(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mathrm{Th}(\mathfrak{K}_1) \cap \mathrm{Th}(\mathfrak{K}_2)$,

c) $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{MOD}(\Gamma)$ genau dann, wenn $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$,

d) $\mathrm{MOD}(\Gamma \cap \Delta) \supseteq \mathrm{MOD}(\Gamma) \cup \mathrm{MOD}(\Delta)$,

e) $\mathrm{Th}(\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2) \supseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K}_1) \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{K}_2)$.

Zeigen Sie im Falle von (d) und (e), dass keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine Sprache mit Gleichheit und den Konstantensymbolen c_1, c_2. Zeigen Sie, daß $\{\phi \mid \exists xy(x \neq y) \vdash \phi\} \cup \{c_1 \neq c_2\}$ eine Henkin-Theorie ist.