

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Konstruieren Sie unter Verwendung von Tableaux Gegenmodelle zu folgenden Formeln:

(a) $\Diamond p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ (2 Punkte)

(b) $(\Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$ (2 Punkte)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Für welche der folgenden Formeln gibt es einen K-Tableaubeweis? Für welche einen T-Tableaubeweis? Geben Sie im negativen Fall jeweils ein aus dem Tableau konstruiertes Gegenmodell an.

(a) $\Diamond(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)$ (2 Punkte)

(b) $\Box(p \rightarrow q) \vee \Box(q \rightarrow p)$ (2 Punkte)

(c) $\Diamond(p \rightarrow q) \vee \Diamond(q \rightarrow p)$ (2 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir erweitern K um das *Gödel-Löb-Axiom* $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$, wodurch wir die Logik GL erhalten.

Zeigen Sie, dass $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ in GL gilt. Sie können einen Kalkül verwenden, oder semantisch argumentieren.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir einen Tableaunkalkül für S5 durch Hinzunahme der Regelpaare *T*, *4* und *4r* angegeben. Alternativ kann ein Tableaunkalkül für S5 angegeben werden, bei dem nur Signaturen der Form *n* (für $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$) vorkommen, und in dem für die Modaloperatoren lediglich die folgenden Regeln verwendet werden:

Falls die Signatur *k* noch nicht im Zweig vorkommt:

$$(\Diamond^*) \frac{n \Diamond A}{k A} \qquad (\neg\Box^*) \frac{n \neg\Box A}{k \neg A}$$

Falls die Signatur *k* schon im Zweig vorkommt:

$$(\Box^*) \frac{n \Box A}{k A} \qquad (\neg\Diamond^*) \frac{n \neg\Diamond A}{k \neg A}$$

Geben Sie jeweils einen Beweis für $\Box p \vee \Box(\Box p \rightarrow q)$ in jedem der beiden Tableaunkalküle für S5 an.