

Mathematische Logik I

Blatt 8

Hinweis (Notation): Wir verwenden x, y etc. als metasprachliche Variablen für die objektsprachlichen Variablen x_k einer formalen Sprache. Weiterhin schreiben wir $t \neq s$ als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\neg t = s)$.

Aufgabe 28: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie (siehe S. 50, Skript). Geben Sie an, ob die folgenden Zeichenreihen Terme von \mathcal{L} sind. Falls es sich um einen Term handelt, geben Sie jeweils die Menge der freien Variablen an und prüfen Sie, ob der Term offen ist. Begründen Sie ihre Antwort.

- | | |
|--------------------|---|
| (a) x | (b) $\forall x : x$ |
| (c) $x + 1$ | (d) $\dot{c}_0 - \dot{c}_0$ |
| (e) $x \leq x + y$ | (f) $\dot{f}_-(0 + (x + \dot{f}_-(y)))$ |

Aufgabe 29: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ wie oben. Geben Sie an, ob die folgenden Zeichenreihen Formeln von \mathcal{L} sind. Falls es sich um eine Formel handelt, geben Sie die Menge der freien und gebundenen Variablen an, und prüfen Sie, ob sie eine Aussage ist. Geben Sie zudem den Wirkungsbereich von Quantoren an, indem Sie die entsprechenden Teilformeln unterstreichen. Begründen Sie ihre Antwort.

- | | |
|--|--|
| (a) $x \simeq 0 \vee x \neq 0$ | (b) $x \wedge y \rightarrow 0$ |
| (c) $x = 0 \neq x \neq 0$ | (d) $\forall z : x \neq 0 \wedge \exists y : x \neq y$ |
| (e) $\forall x \forall x \exists x : x \neq x$ | (f) $\forall x \exists y \forall z (x = y \rightarrow x \leq y + x)$ |
| (g) $\exists x \leq x$ | (h) $\forall x \exists y \forall z ((x = y) \rightarrow x \leq (y + x))$ |

Aufgabe 30: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ wie oben und $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, \leq, 1 \rangle$ eine \mathcal{L} -Struktur. Dabei sei die einstellige Funktion $-$ wie folgt definiert:

$$- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} n + 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die übrigen ausgezeichneten Objekte der Struktur seien wie üblich gegeben. Sei zudem $v : \text{VAR} \rightarrow \mathbb{N} : x_k \mapsto k^2$ eine Belegung der Variablen. Werten Sie die folgenden Terme und Formeln schrittweise in \mathfrak{A} unter der Belegung v aus:

- | | |
|--|---|
| (a) $((0 + 0) + x_2) + x_3$ | (b) $\overline{(x_3 + 0)} + (\overline{x_2})$ |
| (c) $(x_3 \leq x_4 \rightarrow x_2 \leq x_3) \rightarrow \neg(0 \leq x_1)$ | (d) $0 \leq x_0$ |
| (e) $\forall x(0 \leq x)$ | (f) $\exists x(0 \leq x)$ |

Aufgabe 31 (Zweiter Versuch): Lösen Sie Aufgabe (21), Blatt 6, erneut. Achten Sie bei der Angabe von Ableitungsbäumen auf eine übersichtliche Darstellung.

Hinweis (Zweiter Versuch): Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt in die Bewertung ein.