Aufgaben zur Klausurvorbereitung
(ohne Abgabe)

Aufgabe 1

Geben Sie den Strukturbaum, sämtliche Teilformeln sowie den Rang der folgenden Aussage an:

$$\neg(p_1 \to ((\neg p_3 \wedge p_1) \vee p_2)) \to p_3$$

Aufgabe 2

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3)$$

Aufgabe 3

Die zweistellige aussagenlogische Verknüpfung $\star$ werde durch die Funktion $f_\star$ mit der folgenden Wahrheitstafel interpretiert:

x	y	$f_\star(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Warum ist $\star$ nicht funktional vollständig?

Aufgabe 4

Geben Sie für die folgende Formel eine Formel in konjunktiver Normalform an:

$$\phi \to (\neg\psi \wedge \phi)$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie in NK: $\phi \to (\psi \to \sigma) \vdash \psi \to (\phi \to \sigma)$.

Aufgabe 6

Erläutern Sie:

(a) Wann heißt eine Aussagenmenge maximal konsistent?

(b) Wie konstruiert man zu einer konsistenten Aussagenmenge eine maximal konsistente Erweiterung?

Aufgabe 7

Zeigen Sie: Eine konsistente Menge aussagenlogischer Formeln Γ ist maximal konsistent genau dann, wenn für jedes ϕ gilt: entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie: $\phi \to \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Formelmenge enthalten, wenn nicht zugleich ϕ und $\neg\psi$ darin enthalten sind.

Aufgabe 9

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, |\cdot|, -, 1 \rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren nichtlogische Zeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen, Relationen und Individuen der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$ und $v(x_2) = -1$.
Werten Sie schrittweise aus: $[\![(x_1 - 1)^2 - |x_2|]\!]_v$.

Aufgabe 10

Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine pränexe Normalform um:

$$\neg\forall x\phi(x) \to \exists x(\phi(x) \to \forall y\phi(y))$$

Aufgabe 11

Zeigen Sie: $\vDash \exists x(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\phi \vee \exists x\psi$.

Aufgabe 12

Zeigen Sie in NK: $\vdash \exists x\exists y\phi(x, y) \leftrightarrow \exists y\exists x\phi(x, y)$.

Aufgabe 13

Erläutern Sie:

(a) Was ist eine Theorie?

(b) Was ist eine Henkin-Theorie?

(c) Was besagt der Kompaktheitssatz?
Beweisen Sie ihn mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes.

Aufgabe 14

Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her.

Aufgabe 15

Es seien T_1 und T_2 Theorien. Zeigen Sie:

(a) $T_1 \cap T_2$ ist ebenfalls eine Theorie.

(b) $T_1 \cup T_2$ ist im allgemeinen keine Theorie. (Geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 16

Es sei T eine vollständige Henkin-Theorie. Weiterhin sei $\phi(x)$ eine Formel mit x als einziger freier Variable.
Zeigen Sie: Falls $\phi(t) \in T$ für jeden geschlossenen Term t, dann auch $\forall x\phi(x) \in T$.