Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 3**

Dr. Michael Arndt **WS 2015/16**

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

In einer logischen Folgerungsrelation $\Gamma \models \phi$ heißt die Formel ϕ *logische Konsequenz* der Annahmen Γ. Für eine Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ sei die *Menge aller logischen Konsequenzen* aus Γ definiert als:

$$\mathfrak{K}(\Gamma) =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathrm{PROP} : \Gamma \models \phi\}$$

Zeigen Sie, dass die Mengenoperation $\mathfrak{K}$ die folgenden Eigenschaften hat:

a) $\mathfrak{K}\big(\{\bot\}\big) = \mathrm{PROP}$

b) $\mathfrak{K}\big(\{\neg p_0 \vee p_0\}\big) = \mathrm{TAUT}$

c) $\mathfrak{K}(\Gamma) = \mathfrak{K}\big(\mathfrak{K}(\Gamma)\big)$

d) Wenn $\Gamma \subseteq \Delta$, dann $\mathfrak{K}(\Gamma) \subseteq \mathfrak{K}(\Delta)$.

Hierbei sei $\mathrm{TAUT} =_{\mathrm{def}} \{\phi \in \mathrm{PROP} : \models \phi\}$ die Menge aller tautologischen Aussagen.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren eine Formel, die den Junktor \$, welcher durch folgende Wahrheitstafel gegeben ist, durch die Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und $\bot$ ausdrückt:

ϕ_3	ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Beweisen Sie:

a) *Die Menge* $\{|\}$ *ist funktional vollständig.*

b) *Die Menge* $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ *ist nicht funktional vollständig.*

Hinweis: Bei dem Junktor “|” handelt es sich um die Exklusion (Sheffer-Strich, NAND).