

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Ableitbarkeitsbehauptungen durch Angabe einer Ableitung im Kalkül NK:

- (a) $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- (b) $\vdash \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$
- (c) $\vdash \exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$

Aufgabe 2

Der Parameter a komme in A nicht vor. Beweisen Sie durch Angabe einer Ableitung im Kalkül NK:

- (a) $\exists x (A \rightarrow B(x)) \vdash A \rightarrow \exists x B(x)$
- (b) $A \vee \neg A, A \rightarrow \exists x B(x) \vdash \exists x (A \rightarrow B(x))$

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Ableitung für $\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y) \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x))$:

$$\frac{\frac{\frac{\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)}{\forall xP(x)} (\wedge B) \quad \frac{\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)}{\forall yQ(y)} (\wedge B)}{\frac{\forall xP(x)}{P(a)} (\forall B) \quad \frac{\forall yQ(y)}{Q(a)} (\forall B)}{\frac{P(a) \wedge Q(a)}{\forall x(P(x) \wedge Q(x))} (\wedge E)} (\forall E)$$

(b) Ableitung für $\vdash \exists x\neg P(x) \rightarrow \neg\forall xP(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{[\exists x\neg P(x)]^3}{\perp} (\exists B)^1 \quad \frac{[\neg P(a)]^1 \quad \frac{[\forall xP(x)]^2}{P(a)} (\forall B)}{(\rightarrow B)}}{\perp} (\rightarrow E)^2}{\neg\forall xP(x)} (\rightarrow E)^3$$

(c) Ableitung für $\vdash \exists xP(x) \rightarrow \neg\forall x\neg P(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{[\exists xP(x)]^3}{\neg\forall x\neg P(x)} (\exists B)^2 \quad \frac{[\forall x\neg P(x)]^1}{\neg P(a)} (\forall B)}{\perp} (\rightarrow E)^1}{\neg\forall x\neg P(x)} (\rightarrow E)^3$$

Lösungen zu Aufgabe 2

Der Parameter a komme in A nicht vor.

(a) Ableitung für $\exists x(A \rightarrow B(x)) \vdash_{NK} A \rightarrow \exists xB(x)$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[A \rightarrow B(a)]^1 \quad [A]^2}{B(a)} (\rightarrow B)}{\exists x(A \rightarrow B(x)) \quad \exists xB(x)} (\exists E)}{\exists xB(x)} (\exists B)^1}{A \rightarrow \exists xB(x)} (\rightarrow E)^2$$

(b) Ableitung für $A \vee \neg A, A \rightarrow \exists xB(x) \vdash \exists x(A \rightarrow B(x))$:

$$\frac{\frac{\frac{A \vee \neg A}{\exists x(A \rightarrow B(x))} (\vee B)^1 \quad \frac{\frac{[A]^3}{\exists xB(x)} (\rightarrow B) \quad \frac{[B(a)]^1}{A \rightarrow B(a)} (\rightarrow E)}{\exists x(A \rightarrow B(x))} (\exists E)}{\exists x(A \rightarrow B(x))} (\exists B)^1 \quad \frac{\frac{[\neg A]^3 \quad [A]^2}{\perp} (\rightarrow B) \quad \frac{\perp}{B(a)} (\perp)}{\frac{A \rightarrow B(a)}{\exists x(A \rightarrow B(x))} (\rightarrow E)^2} (\exists E)^3$$