Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 1

Prof. Schroeder-Heister
René Gazzari

Wintersemester 2017/18
Universität Tübingen

Aufgabe 1:

1. Geben Sie den Strukturbaum, den Rang aller Teilformeln (im Strukturbaum) und je zwei Bildungsfolgen an für:

$$\neg(\neg p_0 \wedge p_1) \quad ; \quad \neg\neg(p_0 \wedge p_1) \quad ; \quad \neg\neg p_0 \wedge p_1$$

   Aus wievielen Symbolen des Alphabets bestehen die einzelnen Formeln?

2. Verfahren Sie analog mit $\neg(\phi \wedge \psi \to \neg\phi \wedge \phi)$. Was ist der wesentliche Unterschied zur ersten Teilaufgabe?

Aufgabe 2: Zeigen Sie mithilfe einer Induktion über dem Formelaufbau, dass die Anzahl der sich öffnenden und der sich schließenden Klammern in einer Formel stets gleich ist.

Aufgabe 3:

1. Geben Sie eine rekursive Definition der Funktion $\mathbf{J} : \mathrm{PROP} \to \mathbb{N}$ an, die jeder Formel die Anzahl der in ihr vorkommenden Junktoren zuordnet.

   Es soll also zum Beispiel $\mathbf{J}(\neg\neg p \wedge q) = 3$ und $\mathbf{J}(p) = 0$ gelten.

2. Zeigen Sie mithilfe einer Induktion über dem Formelaufbau, dass die folgende Ungleichung für alle Formeln $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

$$|\mathbf{sub}(\phi)| \ \leq \ 2 \cdot \mathbf{J}(\phi) + 1$$

Aufgabe 4:

1. Definieren Sie eine Funktion $\mathbf{A} : \mathrm{PROP} \to \mathrm{PROP}$, die in einer Formel alle nicht-negierten Aussagevariablen negiert und umgekehrt.

   Es soll also zum Beispiel $\mathbf{A}((p \to \neg q) \to \neg\neg p) \doteq (\neg p \to q) \to \neg p$ gelten.

   Wieso ist hier eine einfache rekursive Definition problematisch? Gibt es Formeln ϕ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\mathbf{A}(\phi) \doteq \phi \quad ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{A}(\phi)) \doteq \phi \quad ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{A}(\phi)) \neq \phi$$

2. Beweisen Sie, dass ihre Definition wohldefiniert ist, dass also die von Ihnen definierte Funktion $\mathbf{A}$ jeder Formel genau eine Formel zuordnet.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.