Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 11

Prof. Schroeder-Heister
René Gazzari

Wintersemester 2017/18
Universität Tübingen

Aufgabe 41: Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine PNF um. Geben Sie dabei an, welche logischen Äquivalenzen Sie verwenden.

$$\neg\big(\exists x\phi(x,y) \land (\forall y\psi(y) \to \phi(x,x)) \to \exists x\forall y\sigma(x,y)\big)$$

Gehen Sie dabei davon aus, dass die Formeln ϕ, ψ und σ quantorenfrei sind. Warum ist das hier notwendig?

Aufgabe 42: Wir erweitern formale Sprachen $\mathcal{L}$ um den Quantor $\daleth$ (fast alle). Erweitern Sie die Definition 9.4 (Auswertung von Formeln) derart, dass $\daleth x\,\phi$ genau dann wahr ist, wenn höchstens endlich viele Elemente des Universums die durch ϕ beschriebene Eigenschaft nicht haben. Zeigen Sie anschließend:

(a) falls $\mathfrak{A}$ unendlich, dann $\mathfrak{A} \models \daleth x\phi(x) \to \exists x\phi(x)$
(b) $\not\models \daleth x\phi(x) \to \exists x\phi(x)$
(c) $\mathfrak{A} \models \daleth x\phi(x) \land \daleth x\neg\phi(x) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A}$ ist endlich.

Aufgabe 43: Zeigen Sie im Kalkül NK:

(a) $\exists x(\phi(x) \land \psi) \vdash \exists x\phi(x) \land \psi$, sofern $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$
(b) $\vdash \forall x\phi(x) \to \neg\exists x\neg\phi(x)$
(c) $\vdash \neg\exists x\neg\phi(x) \to \forall x\phi(x)$

Hinweis: Im Kalkül NK ist der Quantor $\exists$ ein eigenständiges Zeichen mit eigenen Schlussregeln und insbesondere die Formel $\exists x\phi$ keine Abkürzung.

Arithmetik: Die Arithmetik PA entsteht aus der schwachen Arithmetik PA_0 durch Hinzunahme von Axiomen für Addition und Multiplikation:

(A_1) $\forall x.\, x + 0 = x$, $\quad$ (A_2) $\forall xy.\, x + N(y) = N(x + y)$

(M_1) $\forall x.\, x \times 0 = 0$, $\quad$ (M_2) $\forall xy.\, x \times N(y) = x \times y + x$

Das Induktionsschema wird an die erweiterte Sprache der Arithmetik angepasst. (D.h. in den Formeln ϕ können jetzt auch Addition und Multiplikation vorkommen.)

Aufgabe 44: Beweisen Sie die folgenden arithmetischen Aussagen:

(a) $\mathrm{PA} \vdash \forall z, x, y : (x + z = y + z \to x = y)$ (rechtsseitige Kürzung)
(b) $\mathrm{PA} \vdash \forall x, y : (x + y = y + x)$ (Kommutativität)

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.