1 Gleichungen

Beim Lösen von Gleichungen wird zwischen der *Grundmenge*, der *Definitionsmenge* und der *Lösungsmenge* unterschieden:

Merke

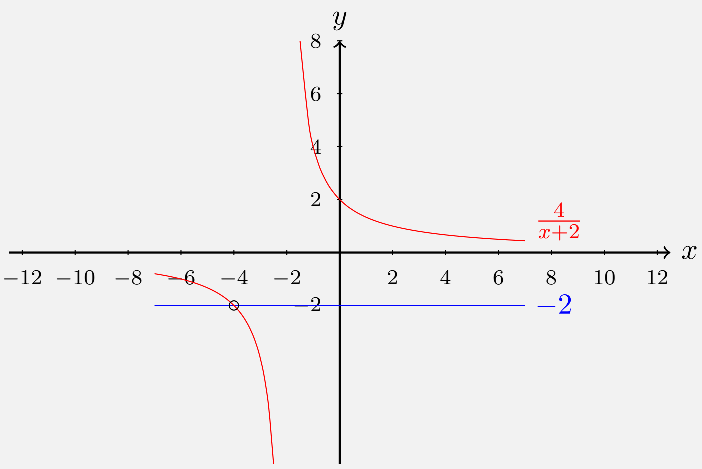
- *Grundmenge* G. Sie enthält alle Zahlen, die grundsätzlich für die verwendete Variable eingesetzt werden können.
- *Definitionsmenge* D. Sie enthält alle Zahlen der Grundmenge, für die die Gleichung definiert ist. Bei einem Bruch muss beachtet werden, dass man durch Null nicht teilen darf.
- *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$. Sie enthält alle Zahlen der Definitionsmenge, die Lösungen der Gleichung sind. Eine Zahl heißt *Lösung* der Gleichung, wenn man beim Einsetzen dieser Zahl für die verwendete Variable auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis erhält.

1.1 Bruchgleichungen

Bei einer *Bruchgleichung* tritt die gesuchte Variable im Nenner des Bruchs auf, zum Beispiel $\frac{4}{x+2} = -2$.

Reminder

Bei einer Bruchgleichung ist besonders zu beachten, dass nicht durch Null geteilt werden darf. Das Beispiel $\frac{4}{x+2} = -2$ hat für $x = -2$ keine Lösung, da hier durch Null geteilt werden würde.
Grafische Darstellung der Gleichung:



Hier erkennen wir, dass der Graph von $\frac{4}{x+2}$ an der Stelle $x = -2$ nicht definiert ist und damit an dieser Stelle eine senkrechte Asymptote besitzt.

Um das Beispiel $\frac{4}{x+2} = -2$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ zu lösen, wird folgendermaßen vorgegangen.

Merke

Lösen einer Bruchgleichung

1. Ermitteln der Definitionsmenge D. Falls $x+2 = 0$ gilt, d.h. falls $x = -2$ gilt, so ist $\frac{2}{x+2}$ nicht definiert. Somit kann die Zahl -2 keine Lösung der Gleichung sein und muss aus der Definitionsmenge D herausgenommen werden. D enhält daher alle reellen Zahlen außer -2 – kurz geschrieben: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Anschließend wird die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ermittelt, indem die Bruchgleichung nach x umgeformt wird:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= -2 \\ 4 &= -2 \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot x - 4 \\ 8 &= -2 \cdot x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Bruchgleichung hat eine Lösung $x = -4$, kurz geschrieben: $\mathbb{L} = \{-4\}$.

Aufgabe 1.0*

Löse die Bruchgleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$. Gib auch die Definitionsmenge D an.

(a) $\frac{2x}{x-28} = 6$

(b) $\frac{14}{3x-8} + \frac{12}{4-2x} = 0$

(c) $\frac{3}{x} - \frac{2x}{x-1} = -2$

(d) $\frac{x}{x-2} + 2 = 3 \cdot \frac{x}{x+2}$

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 29)

Fasse den Ausdruck $\frac{1}{x+1} + x - 1$ zu einem Bruch zusammen.

Aufgabe 1.1*

Forme nach x um und gib die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an: $\frac{a-2x}{6x} + 2 = \frac{3x-a}{2x}$

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 28)

(a) Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1, R_2 gilt $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Löse die Gleichung nach R auf.

(b) Bringe $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-3}$ auf den Hauptnenner.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 30)

Vereinfache $(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3})^3 : (\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2})^4$.

1.2 Betragsgleichungen

Wie ist das denn nun?

Es steht der Weitwurf bei den Bundesjugendspielen an. Maike, das Sportass, wirft ihren Ball 50m. Lukas passiert ein Missgeschick und er wirft den Ball ausversehen nach hinten. Nachdem Frau Mayer nachgemessen hat werden bei Lukas -50m eingetragen. Maike meint zu Lukas „Ich hab doppelt so weit geworfen wie du.” Was würdest du sagen, hat Maike recht?

Aufgabe 1.2

Wie weit sind die folgenden Zahlen $x \in \mathbb{R}$ von der 0 auf dem Zahlenstrahl entfernt, wenn der Abstand zwischen zwei ganzen Zahlen jeweils 1cm ist?

(a) $x = 1$ (b) $x = 4$ (c) $x = -13$ (d) $x = -4$

Merke

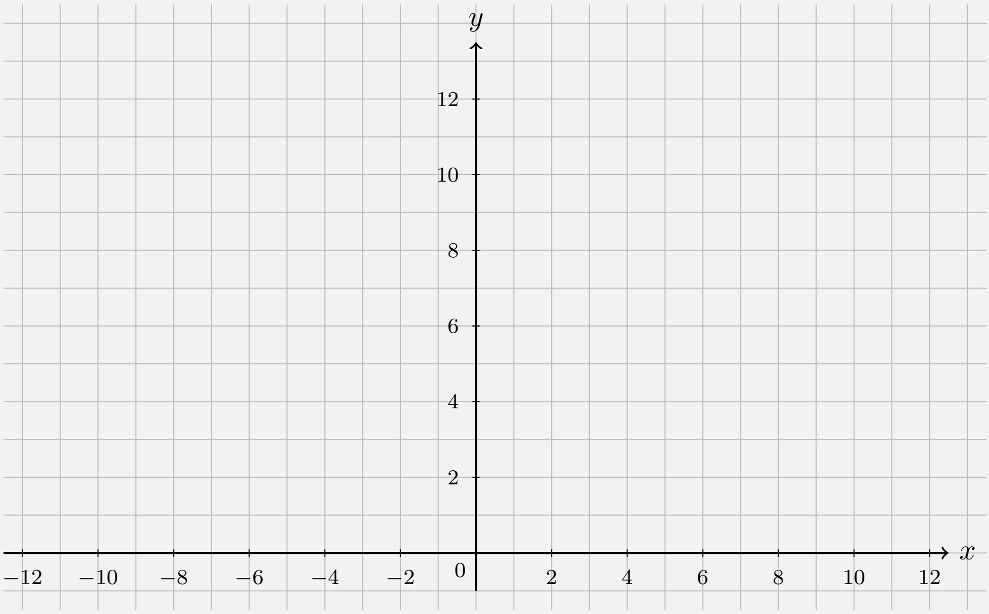
Der *Betrag* einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ beschreibt ihren Abstand von der Null und wird mit $|x|$ bezeichnet. Der Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird durch die *Betragsfunktion*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

von $\mathbb{R}$ in die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}$ angegeben.

Aufgabe 1.3

Zeichne die Betragsfunktion, welche ein $x \in \mathbb{R}$ wie im obigen Merkkasten beschrieben abbildet, in das folgende Koordinatensystem ein.



Aufgabe 1.4

Es sind zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. In der untenstehenden (Un-)Gleichung ist ein Zeichen verloren gegangen. Gehört ein $<$, $>$ oder $=$ dorthin? Argumentiere, welches der Zeichen an die Stelle der ?? gehört.

$$|a \cdot b| \quad ?? \quad |a| \cdot |b|$$

Aufgabe 1.5

Die Folgende Ungleichung heißt auch *Dreiecksungleichung*, hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Argumentiere geometrisch, weshalb diese stets gilt.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Tipp: Die Ungleichung heißt nicht ohne Grund Dreiecksungleichung. Es lassen sich $|a|$ und $|b|$ auch als Längen von orientierten Strecken auffassen.

Merke

Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i)	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	(*Symmetrie* des Betrags)
(ii)	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	(*Multiplikativität* des Betrags)
(iii)	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	(*Dreiecksungleichung* des Betrags)

Gib für die Gleichung $|3 - x| = 7$ die Lösungsmenge an.

Für $|3 - x| = 7$ gibt es die zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &\underline{x < 3} && \text{oder} && \underline{x > 3} \\ 3 - x &= 7 && && 3 - x = -7 \\ x &= -4 && && x = 10 \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{-4, 10\}$.

Merke

Im Gegensatz zu einer Gleichung der Form $x + 1 = 2$ hat eine Betragsgleichung wie $|x + 1| = 2$ meist nicht eine eindeutige Lösung sondern mehrere Lösungen. Sie werden in der *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ zusammengefasst. Im Fall $|x + 1| = 2$ wäre diese $\mathbb{L} = \{1, -3\}$.

Merke

Lösen einer Betragsgleichung

1. Bestimme die Definitionsmenge D der Betragsgleichung.
2. Schaue nun, wann der Term im Betrag positiv und wann er negativ ist.
3. Finde heraus, welche Anforderungen dabei an die Variable x gestellt sind und Unterscheide die beiden Fälle.

4. Löse nun die Gleichungen für beide Fälle um die gesamte Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zu erhalten.

Wie war das nochmal?

Ungleichungen lassen sich ganz ähnlich wie Gleichungen manipulieren. Der einzige wichtige Unterschied ergibt sich, wenn wir beide Seiten der Gleichung mit einer negativen Zahl multiplizieren. Hierbei wird nämlich ein „größer als“ zu einem „kleiner als“ und umgekehrt. Dies lässt sich auch leicht an diesem kleinen Beispiel nachvollziehen:

$$\begin{aligned} 2 &< 5 \qquad\qquad \mid \cdot (-1) \\ -2 &> -5 \end{aligned}$$

Gib für die Ungleichung $|x+1| < 4$ die Lösungsmenge an.

Für $|x+1| < 4$ gibt es die zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \underline{x < -1} \qquad & \text{oder} \qquad & \underline{x > -1} \\ x+1 > -4 \qquad & & x+1 < 4 \\ x > -5 \qquad & & x < 3 \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } -5 < x < 3\}$.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 5 teilweise)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllt?

(a) $|2x-3| = 8$

(b) $|x-3| < 2$

(c) $|3x-6| \leq x+2$

(d) $|2x-3| > 5$

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 26)

Der Staudruck p_{St} bei einer Strömung ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, d.h. $p_{St}(v) = kv^2$. In welchem Geschwindigkeitsbereich ist er kleiner als ein vorgegebener Wert $p_0 > 0$?

Aufgabe 1.6

Gib die Definitionsmenge D und Lösunsgmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Gleichungen an.

(a) $|2x+5| = 7$

(b) $2x - |3-x| = 18$

(c) $\frac{|3x-3|}{x+1} = 1$

(d) $\frac{5x+5}{|3x+1|} = 2$

Aufgabe 1.7

Gib die Lösunsgmenge $\mathbb{L}$ der folgenden Ungleichungen an.

(a) $2 + |x + 3| < 3$

(b) $2 \cdot |x - 1| > 8$

(c) $||x - 5| - 3| \leq 4$

(d) $|x + 1| - |2x - 6| \leq 10$

Aufgabe 1.8

(Noch etwas zum üben, wiederholen und auffrischen daheim)
Gib die Definitionsmenge D und Lösungsmenge $\mathbb{L}$
der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen an.

(a) $5 - 3 \cdot |x - 6| \leq 3x - 7$

(b) $x - |2x - 12| \geq 0$

(c) $5 \cdot |x - 3| + 3x = -1$

(d) $|3x + 6| - 2x = -5$

(e) $\frac{|x-3|}{5} = x - 7$

(f) $\frac{|x-4|}{x+2} = \frac{x-1}{x+7}$

Lösung:(a)$\mathbb{L} = \mathbb{R}$, (b)$\mathbb{L} = \{4 \leq x \leq 13\}$, (c)$\mathbb{L} = \emptyset$ (keine Lösung), (d)$\mathbb{L} = \emptyset$ (keine Lösung), (e)$\mathbb{L} = \{8\}$, (f)$\mathbb{L} = \{-5, 3, 13\}$