zur Erinnerung und Vorarbeit

① die Assoziativgesetze: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

② die kommutativgesetze: $a+b = b+a$

$a \cdot b = b \cdot a$

③ Wir wissen: $x \cdot x^{-1} = 1$

zur Erinnerung: $x^{-1} = \frac{1}{x}$

Beispiel: $5^{-1} = \frac{1}{5}$ und

$5 \cdot 5^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Dann gilt aber auch: $(a \cdot b)\cdot(a \cdot b)^{-1} = 1$

④ $\frac{1}{b} = b^{-1}$ und damit $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$

Außerdem gilt: wenn $x \cdot y = 1$, dann folgt daraus, dass $y = x^{-1}$

Beispiel:
$3 \cdot y = 1$
dann gilt $y = \frac{1}{3}$

Folgerung:

Wenn also gilt: $(a \cdot b)\cdot(a^{-1}\cdot b^{-1}) = 1$, dann folgt $a^{-1}\cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$

Wir prüfen nach:

$$(a \cdot b)\,(a^{-1}\cdot b^{-1}) \overset{1.}{=} a \cdot b \cdot a^{-1}\cdot b^{-1} \overset{2.}{=} \underbrace{a \cdot a^{-1}}_{=1}\cdot \underbrace{b b^{-1}}_{=1} = 1$$

und damit gilt: $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$

Kommen wir zum Beweis:

zu zeigen ist: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$

$$\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \overset{4.}{=} (m \cdot n^{-1}) \cdot (p \cdot q^{-1}) \overset{1.}{=} m \cdot n^{-1} \cdot p \cdot q^{-1} \overset{2.}{=} m \cdot p \cdot n^{-1} q^{-1} =$$

Folgerung nach 4.

$$\overset{}{=} m \cdot p \cdot (n \cdot q)^{-1} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

$\square$

Zur Erinnerung und Vorarbeit

Wenn $x \cdot y = 1$, dann folgt daraus, dass $y = x^{-1}$

Damit folgt aus $d^{-1} \cdot d = 1$ also $d = (d^{-1})^{-1}$ $(*)$

Wir wissen, dass gilt: $5 : 3 = \frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{1}{3} = 5 \cdot 3^{-1}$

Allgemein: $x : y = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{-1}$

Das gilt aber auch beim Arbeiten mit zwei Brüchen:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$$

zu zeigen ist $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} \underset{\Delta}{=} \frac{a}{b} \cdot c^{-1} (d^{-1})^{-1} \overset{(*)}{=} \frac{a}{b} c^{-1} d =$$

Δ s. Beweis zur Multiplikation von Brüchen

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot d = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

□