Verlauf der Graphen und besondere Punkte

1.3 Quadratische Funktionen

Aufgabe 1.0

Untersuche die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ auf Hoch- und Tiefpunkte.

Um den Verlauf des Graphen einer quadratischen Funktion besser direkt über die Gleichung bestimmen zu können, kann es sehr hilfreich sein, die quadratische Funktionsgleichung in ihre *Scheitelpunktform* umzuwandeln.

Merke

Eine quadratische Funktion f durch den Scheitel $S = (x_s \mid y_s)$ kann in folgender Form dargestellt werden:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s.$$

Bei a handelt es sich um einen Streckungsfaktor, der je nach Betrag und Vorzeichen die Parabel verändern kann (siehe folgende Aufgabe).

Aufgabe 1.1*

Vervollständige:

1. Sei $a > 0$. Dann ist y_s der _________ (kleinste/größte) Funktionswert von f. Die Parabel ist dann nach _________ (oben/unten) geöffnet.
2. Sei $a < 0$. Dann ist y_s der _________ (kleinste/größte) Funktionswert von f. Die Parabel ist dann nach _________ (oben/unten) geöffnet.
3. Je größer $|a|$ ist, desto _________ (steiler/flacher) ist die Parabel.

Aufgabe 1.2*

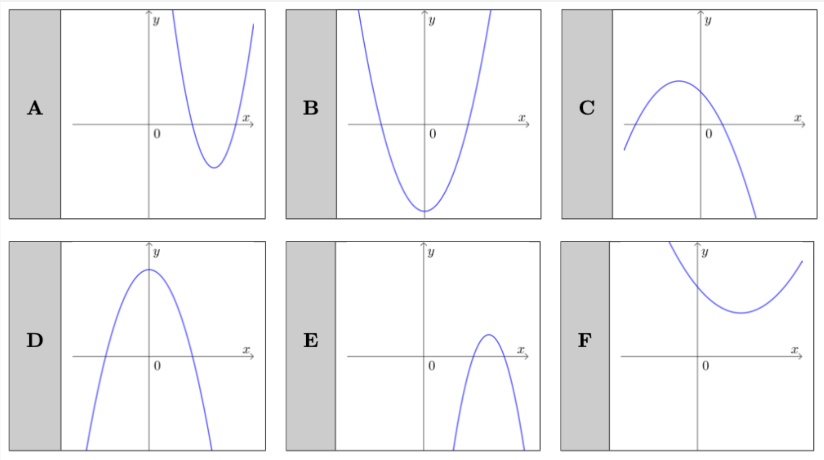
Vervollständige:

1. $f(x) + d, d > 0$ verschiebt den Graphen von f um _____ Einheiten nach _________.
2. $f(x) - d, d > 0$ verschiebt den Graphen von f um _____ Einheiten nach _________.
3. $f(x + c), c > 0$ verschiebt den Graphen von f um _____ Einheiten nach _________.
4. $f(x - c), c > 0$ verschiebt den Graphen von f um _____ Einheiten nach _________.

Aufgabe 1.3*

Ordne folgende Funktionsgleichungen den entsprechenden Funktionsgraphen zu:

1. $f_1(x) = x^2 - 4$
2. $f_2(x) = 0,3 \cdot (x-2)^2 + 2$
3. $f_3(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 2$
4. $f_4(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$
5. $f_5(x) = -0,5 \cdot (x+1)^2 + 2$
6. $f_6(x) = -x^2 + 4$



Quelle: Abbildung von AB - Quadratische Funktionen, Seite 2.

Steckbriefaufgaben

Aufgabe 1.4

Bestimme eine Funktionsgleichung der Parabel mit folgenden Eigenschaften: Sie hat einen Hochpunkt in $H(1 \mid 3)$ und geht durch $P(0 \mid 2)$.

Aufgabe 1.5

Bestimme eine Funktionsgleichung der Parabel mit folgenden Eigenschaften: Sie ist zur y-Achse symmetrisch und hat in $P(1 \mid 6)$ die Steigung 2.

Aufgabe 1.6

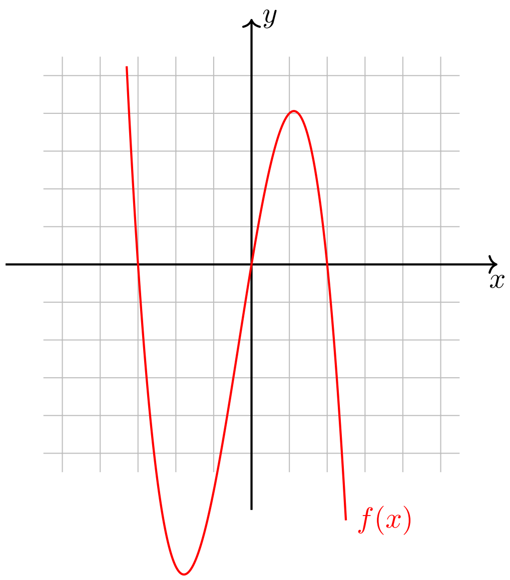
Ist das Schaubild einer Funktion gegeben durch

$$3 + x^3 - 5x^2 = (x^2 + 1)x$$

eine Parabel?

1.4 Polynomfunktionen

Welche Aussagen können wir über den Zusammenhang der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion f und ihres Graphen machen?



Wir wollen zwei Eigenschaften näher betrachten.

Linearfaktoren

Aufgabe 1.7

Gib eine Polynomfunktion f an, die genau die Nullstellen $-3, 5, 120$ hat.
Hinweis: Welchen Grad muss ein Polynom mit diesen Eigenschaften mindestens haben?

Aufgabe 1.8*

Die kubische Polynomfunktion g hat die Nullstellen $2, 3$ und n, fülle aus und ermittle n:

$$g(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = \quad \cdot (x - \quad) \cdot (x - \quad) \cdot (x - \quad).$$

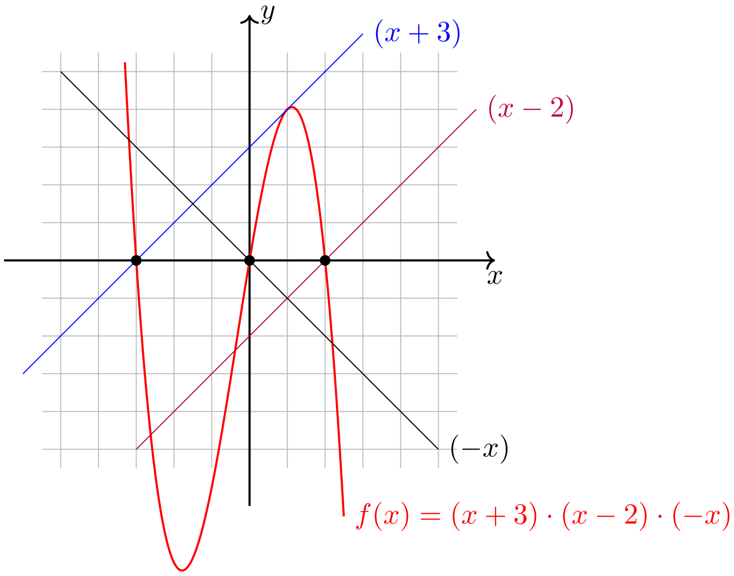
Merke

Hat eine Polynomfunktion f eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$, so können wir in f einen Linearfaktor abspalten. Wir können schreiben:

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a),$$

mit einer Funktion g.

Wir nennen $(x - a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ einen Linearfaktor, da es sich um die Gleichung einer *linearen* Funktion handelt die mittels *Multiplikation* mit den restlichen Termen von $f(x)$ verknüpft ist. Wir können die Linearfaktoren einer Funktion über ihre Graphen veranschaulichen. Betrachte dazu:



Verhalten im Unendlichen

Betrachten wir eine Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

können wir untersuchen was passiert wenn wir für x sehr große (oder sehr kleine) Werte einsetzen. Anders ausgedrückt fragen wir uns, welchen Wert

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

annehmen.

Merke

Das Verhalten einer Polynomfunktion im Unendlichen wird von ihrem Grad n und dem Vorzeichen ihres Leitkoeffizienten a_n, $(n \neq 0)$ bestimmt. Es reicht hier den Term in f mit der höchsten Potenz von x zu betrachten. Dessen Werte steigen oder sinken am schnellsten, wenn wir für die Variable sehr große oder sehr kleine Werte einsetzen.

Aufgabe 1.9

Gib die Werte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ für folgende Wahlen von f an.

(i) $f(x) = -x^1 1$,

(ii) $f(x) = 6 + x^4 - x^3$

(iii) $f(x) = x^2 - 4x + 5 - x^6$

1.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Wie war das nochmal letzte Woche?

Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ zur Basis a hat die Form

$$f(x) = c \cdot a^x,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $1 \neq a > 0$. Ist $a = e$ die eulersche Zahl, so sprechen wir von der natürlichen Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen und Symmetrien. Weiter ist sie streng monoton wachsend.
Die Logarithmusfunktion $\log_b : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ zur Basis b hat die Form

$$\log_b(x) := y \in \mathbb{R} \text{ mit } b^y = x,$$

wobei $x > 0$ und $1 \neq b > 0$ gilt. Ist die Basis $b = e$ die eulersche Zahl, so sprechen wir vom natürlichen Logarithmus und schreiben $\log_e = \ln$. Die Logarithmusfunktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$, weißt keine Symmetrien auf und ist ebenfalls streng monoton wachsend.

Aufgabe 1.10

Sei nun $f(x) = c \cdot a^x$ die Exponentialfunktion und $\log_b(x)$ die Logarithmusfunktion zur Basis b. Erinnere dich kurz an Definitions- und Wertebereich der beiden Funktionen.

(a) Welchen Wert hat $f(0)$ für beliebige Wahl von c und a?

(b) Welchen Wert hat $\log_b(b)$ für beliebige Wahl von b?

(c) Was passiert mit $f(x)$ für $x \to \infty$?

(d) Was passiert mit $f(x)$ für $x \to -\infty$?

(e) Was passiert mit $\log_b(x)$ für $x \to \infty$?

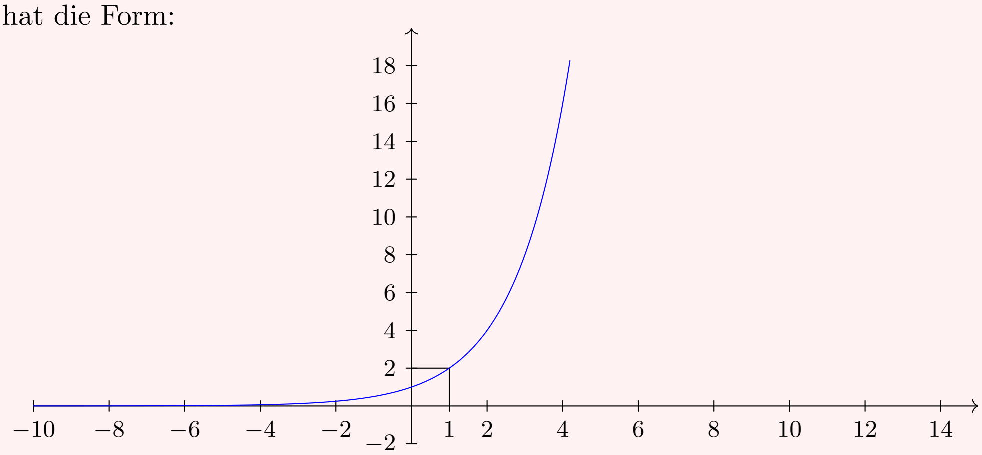
(f) Was passiert mit $\log_b(x)$ für $0 < x \to 0$?

Merke

Der Graph der Exponentialfunktion zur Basis $a = 2$ und $c = 1$

$$f(x) = c \cdot a^x = 1 \cdot 2^x$$

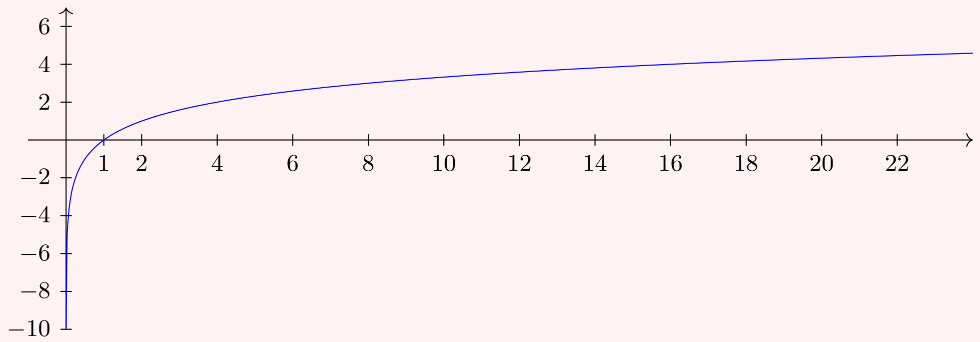
hat die Form:



Der Graph der Logarithmusfunktion zur Basis $b = 2$

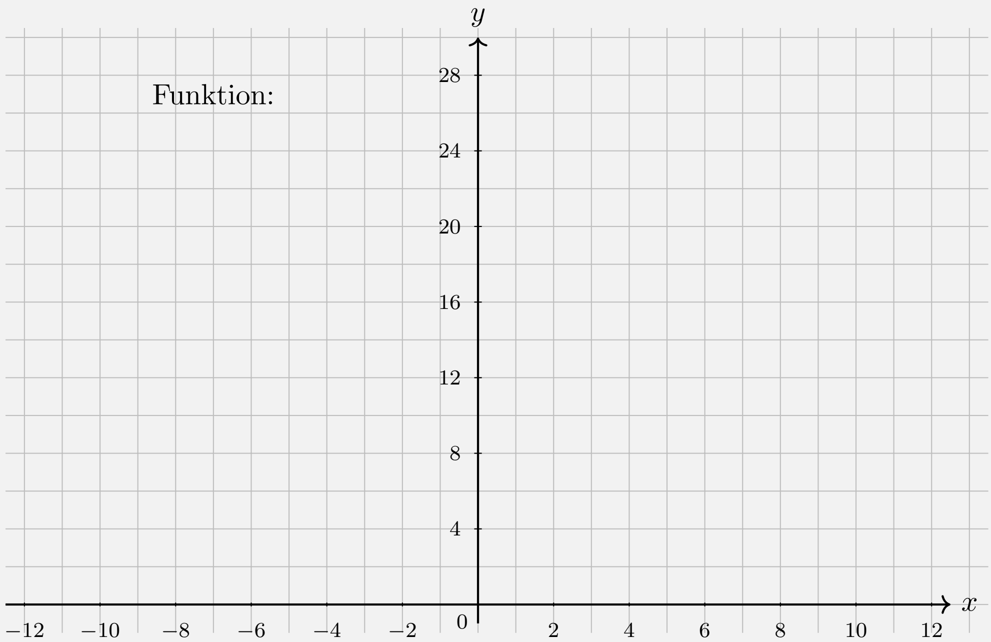
$$\log_b(x) = \log_2(x) := y \in \mathbb{R} \text{ mit } 2^y = x$$

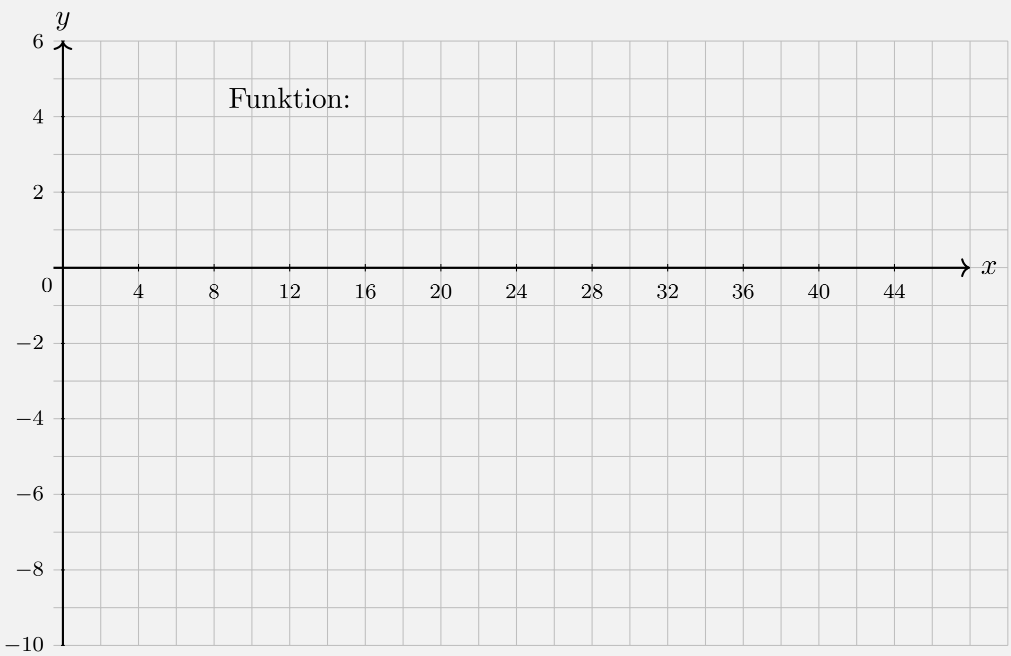
hat die Form:



Aufgabe 1.11

Zeichne die Graphen der natürlichen Logarithmus- und Exponentialfunktion in die folgenden Koordinatensysteme ein. Wähle das passende Koordinatensystem für den jeweiligen Graph.




Funktion:
y
x
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44

Aufgabe* 1.12

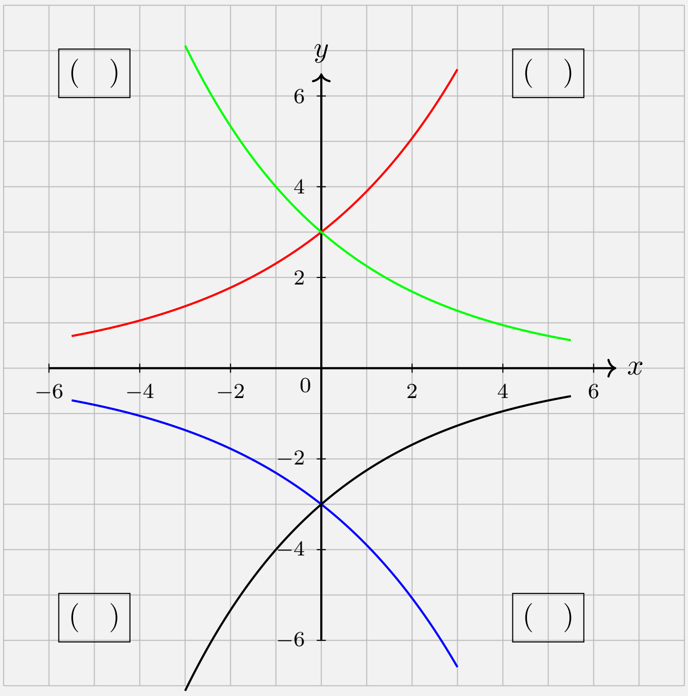
Ordne die folgenden Funktionsgleichungen den passenden Graphen im Schaubild zu.

(a) $f(x) = 3 \cdot 1,3^x$

(b) $f(x) = -3 \cdot 1,3^x$

(c) $f(x) = 3 \cdot 0,75^x$

(d) $f(x) = -3 \cdot 0,75^x$



Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 65)

Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet $n(t) = n_0 \cdot e^{-kt}$.
Die Zahl $n(t)$ gibt die Anzahl der Atome nach t Zeiteinheiten wieder, $n_0 = n(0)$ ist der Bestand an Atomen zur Zeit $t = 0$. Die Zahl $k > 0$ ist die Zerfallskonstante mit der Einheit 1/Zeiteinheit.
Die Tangente an die Kurve von n im Punkt $(0|n_0)$ schneidet die t-Achse im Punkt $(T|0)$. Bestimmen Sie T. Welcher Anteil des Anfangswertes n_0 ist zur Zeit T noch vorhanden?

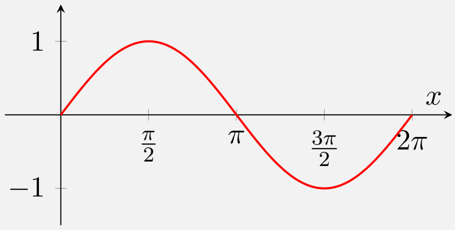
Aufgabe* 1.13

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte $A = (-3|2)$ und $B = (2|5)$. Berechne a und c. Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S mit der vertikalen Achse?

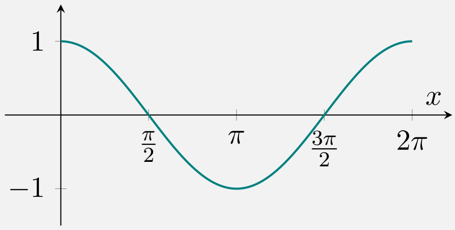
1.6 Trigonometrische Funktionen

Wie war das nochmal mit Sinus, Kosinus und Tangens...?

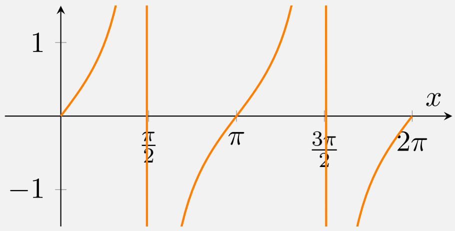
Der Sinus $sin(x)$ hat den Definintionsbereich $D = \mathbb{R}$, die Periodendauer $T = 2\pi$ und als Nullstellen die Menge $\{k \cdot \pi \mid \ k \in \mathbb{Z}\}$.



Der Kosinus $cos(x)$ hat den Definintionsbereich $D = \mathbb{R}$, die Periodendauer $T = 2\pi$ und die Nullstellen $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid \ k \in \mathbb{Z}\}$.



Der Tangens $tan(x)$ ist auf der Menge $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \mid \ n \in \mathbb{Z}\}$ als Quotient von Sinus und Kosinus definiert, $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$.
Periode: $T = 2\pi$,
Nullstellen: $\{k \cdot \pi \mid \ k \in \mathbb{Z}\}$.



Merke

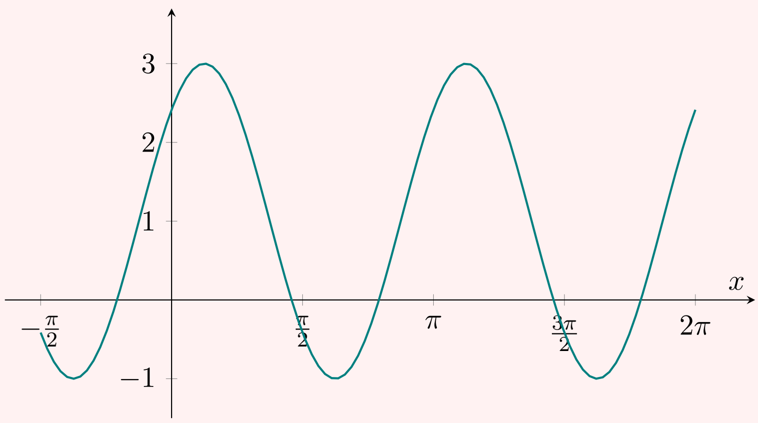
Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d. \tag{I}$$

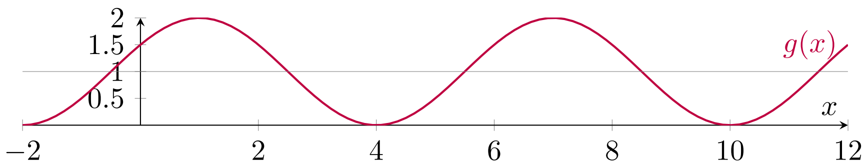
Wir nennen den Betrag von a, $|a| \in \mathbb{R}, |a| \neq 0$ die *Amplitude*.
Mit Hilfe von b erhalten wir die *Periode(-nlänge)* T der Funktion gemäß $T = \frac{2\pi}{|b|}$.
Die Zahlen c und d beschreiben die Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion entlang der x- bzw. der y-Achse. Für $c > 0$ ist der Graph nach links, für $c < 0$ nach rechts verschoben. $d > 0$ beschreibt eine Verschiebung nach oben, $d < 0$ nach unten.

Tipp: Gleiches gilt, wenn du den Sinus in (I) durch einen Kosinus ersetzt.

Hier siehst du den Funktionsgraphen von $2 \cdot \sin(2 \cdot (x - \frac{\pi}{4})) + 1$.
Wie lassen sich die Amplitude, die Periode und die Verschiebungen aus dem Funktionsgraphen ablesen?



Als Beispiel möchten wir anhand des folgenden Graphen $g(x)$ auf den zugehörenden Funktionsterm schließen.

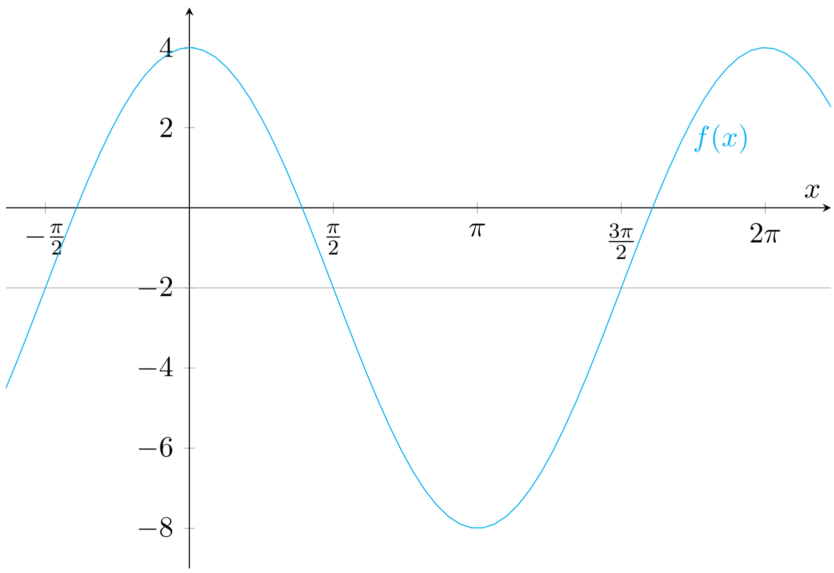


Der Graph liefert uns z. B. einen Kosinus mit

- Amplitude $a = 1$,
- Verschiebung um 1 nach oben: $d = 1$,
- Verschiebung um 1 nach rechts: $d = 1$,
- Periode $T = 6$ und somit $b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$g(x) = \cos(\frac{\pi}{3}(x - 1)) + 1$ ist ein möglicher Funktionsterm zum abbgebildeten Graphen.

Umgekehrt möchten wir den Graphen der Funktion $f(x) = 6 \cdot \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2$ skizzieren.



Wir können f ebenfalls schreiben als $f(x) = 6 \cdot \cos(x) - 2$, denn $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ und $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

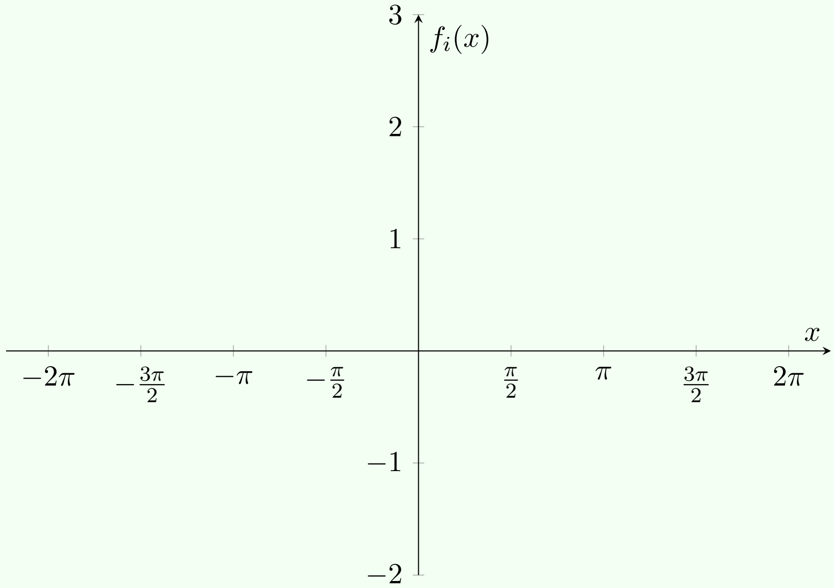
Aufgabe 1.14 (Mindestanforderungskatalog Aufgabe 66)

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen.

(i) $f_1(x) = 2\sin(x)$

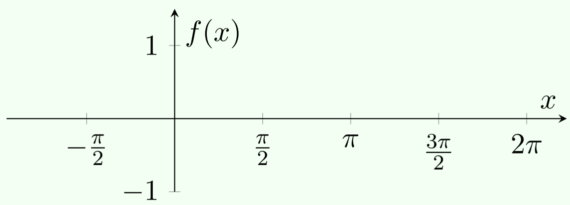
(ii) $f_2(x) = \sin(2x)$

(iii) $f_3(x) = -\sin(x)$



Aufgabe 1.15 (Mindestanforderungskatalog Aufgabe 60)

Skizziere den Graphen von $f(x) = |\sin(x)|$ in das Koordinatensystem.



Aufgabe 1.16

Bestimme die Funktionsterme zu den abgebildeten Graphen.