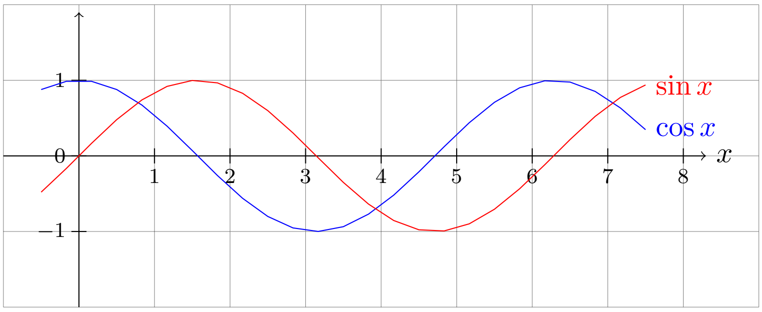
1.3 Trigonometrische Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen sind Gleichungen, in welchen die gesuchte Variable x in z. B. $\sin(x)$, $\cos(x)$ oder $\tan(x)$ vorkommt.

Reminder

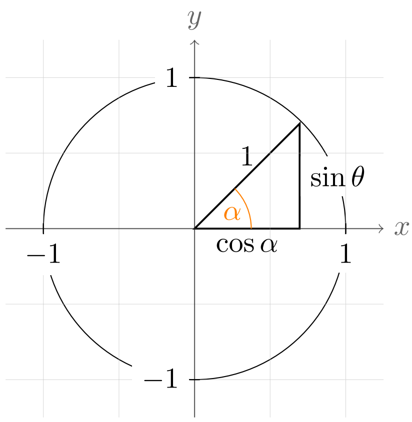
Zeichne die Graphen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Intervall von 0 bis 2π in das Koordinatensystem.



Umrechnung Bogenmaß-Gradmaß

Je nach Aufgabe ist es geschickter Winkel im Grad- oder im Bogenmaß anzugeben. Wenn α ein Winkel im Bogenmaß ist und x denselben Winkel im Bogenmaß bezeichent, hängen die beiden folgendermaßen zusammen: $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$. Nach Kürzen erhalten wir:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$



Aus dem Mindestanforderungskatalog (Nr. 55)

Ergänze die Tabelle.

Bogenmaß	π		$\frac{\pi}{4}$			1
Gradmaß		90°		270°	18°	

Reminder

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Welche Infos stecken in a, b, c und d?

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d \tag{I}$$

Tipp: Gleiches gilt, wenn du den Sinus in (I) durch einen Kosinus ersetzt.

Merke

Lösen trigonometrischer Gleichungen
Gesucht ist die Lösung der Gleichung $2 \cdot \sin(x) - 2 = 0$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

1. Umformen der Gleichung nach $\sin(x)$ (bzw. $\cos(x)$):

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin(x) - 2 &= 0 \\ 2 \cdot \sin(x) &= 2 \\ \sin(x) &= 1 \\ (x &= \sin^{-1}(1)) \end{aligned}$$

2. Intervall berücksichtigen:
Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch. Deshalb ist es wichtig das Intervall zu beachten. Im Intervall $[0, 2\pi]$ hat die Gleichung nur die Lösung $x = \frac{\pi}{2}$, somit gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}\}$.

Für manche Gleichungen finden wir mehrere Lösungen innerhalb einer Periode. Als Beispiel betrachten wir $\sin(x) = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Wir finden die Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$ und $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ $(150°)$. Durch die Symmetrie von Sinus und Kosinus können wir eine zweite Lösung x_2 finden:

- Sinus: $x_2 = \frac{T}{2} - x_1$, z. B. $x_2 = \pi - x_1$ für $\sin(x)$
- Kosinus: $x_2 = -x_1$

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch, d. h. wir finden eine Zahl T, sodass gilt $\sin(x) = \sin(x + T)$ und $\cos(x) = \cos(x + T)$. Das kleinste solche T ist die *Periode*. Mit Hilfe der Periode können wir weitere Lösungen bestimmen.

Merke

Lösen trigonometrischer Gleichungen II
Ist x_1 eine Lösung der trigonometrischen Gleichung, dann ist auch $x_1 + T$ eine Lösung (wenn diese im gefragten Intervall liegt).
Allgemeiner: Ist x eine Lösung, dann auch $x + k \cdot T$ für k= ...-1,0,1,... (wenn diese im genannten Intervall liegen).

Beispiel: Gesucht ist die Lösung der Gleichung $2\sin(x) = 2$ im Intervall $[0, 4\pi]$.

1. Umformen nach $\sin(x)$ bzw. $\cos(x)$

$$\begin{aligned} 2\sin(x) &= 2 \\ \sin(x) &= 1 \end{aligned}$$

2. Finden einer Lösung x_1.
Wir kennen bereits die Lösung $x_1 = \frac{\pi}{2}$ von oben.

3. Weitere Lösung durch Symmetrie
(hier nicht benötigt)

4. Periode T.
$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

5. Weitere Lösungen finden.
$x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}, \ldots$

6. Intervall berücksichtigen:
x_3 liegt nicht mehr im Intervall $[0, 4\pi]$. $\Rightarrow$ Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$.

Aufgabe 1.0

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen im Intervall I

(a) $\sin(x) = -1,$	I$= \mathbb{R}$
(b) $\frac{1}{3}\cos(x) + 1 = 0$	I$= [-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$
(c) $\cos^2(x) - \cos(x) = 0,$	I$=[0, 2\pi]$
(d) $\sin(2x) = 1,$	I$= \mathbb{R}$

1.4 Wurzelgleichungen

Was bisher geschah...

Bei Gleichungsumformungen durch Addition/Subtraktion oder Multiplikation/-Division handelt es sich um *Äquivalenzumformungen*. Diese erzeugen eine zur Ursprungsgleichung äquivalente Gleichung, das bedeutet sie besitzen die selbe Lösungsmenge.

Teilen wir die gegebene Gleichung (I) auf beiden Seiten durch 4 erhalten wir eine äquivalente Gleichung (II). Beide Gleichungen besitzen die Lösungsmenge $\{1\}$.

$$\begin{aligned} 4x &= 4 \quad \left|\cdot \frac{1}{4}\right. && \text{(II)} \\ \iff x &= 1 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Merke

Wir können aus $4x = 4$ folgern, dass $x = 1$ gelten muss, indem wir durch 4 teilen. Bei dieser Umformung handelt es sich um eine Implikation: „aus (I) folgt (II)", wofür wir schreiben:

$$4x = 4 \Longrightarrow x = 1.$$

Umgekehrt können wir aus $x = 1$ durch Multiplikation mit 4 folgern, dass $4x = 4$

gelten muss. Es gilt also:

$$x = 1 \Longrightarrow 4x = 4.$$

Wenn aus einer Gleichung eine andere folgt und umgekehrt, die beiden sich also gegenseitig *implizieren*, so spricht man von einer **Äquivalenz** und schreibt dafür:

$$4x = 4 \iff x = 1.$$

Wie es jetzt weiter geht...

Aus der Gleichung $x = 2$ folgt durch Quadrieren auf beiden Seiten: $x^2 = 2^2 = 4$, wir erhalten die *Implikation:*

$$x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4.$$

Aus $x^2 = 4$ folgt jedoch **nicht** $x = 2$, denn auch $x = -2$ löst diese Gleichung. Es gilt:

$$x^2 = 4 \not\Longrightarrow x = 2,$$

und damit:

$$x^2 = 4 \not\Longleftrightarrow x = 2.$$

Gib für folgende Gleichungen jeweils die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ **vor** und **nach** quadrieren an.

(i) $x = -2$

(ii) $\sqrt{x} = -2$

(iii) $\sqrt{x+2} = x$

Merke

Eine Gleichung auf beiden Seiten zu quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Denn eine Gleichung kann nach dem Quadrieren mehr Lösungen besitzen als zuvor.

Merke

Eine Wurzelgleichung wie zum Beispiel $10 \cdot \sqrt{-4 + 2 \cdot x} + 8 = 28$ lösen wir durch folgendes Vorgehen:

(i) Die Gleichung so umformen, dass der Wurzelausdruck allein auf einer Seite steht:

$$10 \cdot \sqrt{-4 + 2 \cdot x} + 8 = 28 \iff 10 \cdot \sqrt{-4 + 2 \cdot x} = 20 \iff \sqrt{-4 + 2 \cdot x} = 2$$

(ii) Beide Seite quadrieren und nach x auflösen:

$$\sqrt{-4+2\cdot x} = 2 \implies -4+2\cdot x = 4 \iff -4+2\cdot x = 4 \iff x = 4$$

(iii) Lösungskandidaten in die Gleichung einsetzen.

$$10\cdot\sqrt{-4+2\cdot 4}+8 \stackrel{?}{=} 20$$

Mit diesem Schritt überprüfen wir, ob unsere Lösung die ursprüngliche Gleichung tatsächlich erfüllt. Erhalten wir einen unmöglichen Ausdruck (z.B.: $1 = 5$) oder einen nicht definierten Wurzelausdruck (z.B.: $\sqrt{-2}$) so handelt es sich beim eingesetzten Lösungskandidanten um eine **Scheinlösung**. Erhalten wir nach dem Einsetzen auf beiden Seiten das selbe Ergebnis (z.B.: $0 = 0$) so haben wir eine tatsächlich Lösung der Gleichung bestimmt.

Übrigens...

Wir können die Wurzel auch als Potenz schreiben:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Erläutere mit Hilfe der Potenzdarstellung der Wurzel weshalb $\sqrt{x^2} = x$ gilt.

Aufgabe 1.1

Überprüfe, ob die Gleichungen äquivalent sind, gib ihre Lösungsmenge an und vergleiche diese. Kannst du die Gleichungen durch Äquivalenzumformungen ineinander umformen?

$$\begin{aligned}
(i) &\quad x^2+4=13 \quad \text{und} \quad 3\sqrt{2(x^2+4)-1}=15\\
(ii) &\quad x^2+10=8 \quad \text{und} \quad x=4\\
(iii) &\quad (x+2)(x-2)(x+1)=0 \quad \text{und} \quad 2x=2\sqrt{4x+4-x^3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (Mindestanforderungskatalog Aufgaben 40 und 42)

(i) Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $\sqrt{8-2x} = 1+\sqrt{5-x}$?

(ii) Löse die folgenden Ausdrücke nach x auf:

(a) $\sqrt{x}\cdot u = \frac{v}{x^2}$

(b) $x^{\frac{3}{4}}\cdot t^2 = x^{-4}\cdot y$

Aufgabe 1.3*

Löse die Wurzelgleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

(i) $7 \cdot \sqrt{42 - x} = 42$

(ii) $\frac{-2 \cdot \sqrt{6+2 \cdot x}}{3} = 4$

(iii) $\sqrt{x^2 - 6 \cdot x + 24} + 2 \cdot x = 12$

(iv) $5 \cdot \sqrt{3 \cdot x + 10} = 2 \cdot \sqrt{17 - 4 \cdot x}$

(v) $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x} - \sqrt{5 + x} = 0$

(vi) $\sqrt{5 + x^2} - 2 = \sqrt{x^2 - 3 \cdot x + 3}$

Hinweis: Hier wirst du eine der binomischen Formeln verwenden müssen, versuche die drei Formeln aus dem Kopf herzuleiten.

1.5 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Reminder

Potenzgesetze I

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Potenzgesetze II

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
$$a^0 = 1$$

Der Logarithmus

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

Die Eulersche Zahl

$$e = 2,718281\ldots$$

Logarithmusgesetze

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$
$$\log(b : c) = \log\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$
$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$
$$\log_a(\sqrt[c]{b}) = \log_a(b^{\frac{1}{c}}) = \frac{1}{c}\log_a(b)$$
$$\log_{\color{red}a}({\color{green}b}) = \frac{\log_c({\color{green}b})}{\log_c({\color{red}a})}$$

Der **natürliche Logarithmus** ist:

$$\log_e(x) = \ln(x).$$

Es gibt verschiedene Strategien, um Exponentialgleichungen lösen zu können, diese wollen wir hier gemeinsam knacken!

Ausklammern und Satz vom Nullprodukt

Aufgabe 1.4

Löse die Gleichung $3e^{2x} - e^x = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.5

Löse die Gleichung $2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-x} = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Substitution

Aufgabe 1.6

Löse die Gleichung $3e^{2x} - e^x - 2 = 0$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.7 (Mindestanforderungskatalog Aufgabe 41)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

(i) $2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$

(ii) $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$

Reminder

Warum gilt eigentlich $\ln(e^x) = x$?
Betrachten wir den natürlichen Logarithmus als Funktion f mit

$$f(x) = \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

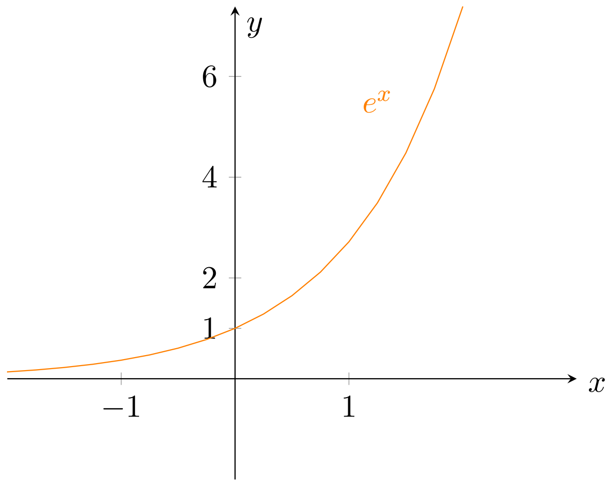
Sie ist die *Umkehrfunktion* der Exponentialfunktion g mit

$$g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Das bedeutet für reelle Zahlen $a > 0$; b:

$$\ln(a) = b \iff a = e^b.$$

Der Funktionsgraph von e^x verläuft nur oberhalb der x-Achse, daran erkennen wir, dass die Funktion $g(x) = e^x$ nur positive Werte annimmt. Aus diesem Grund gilt die oben genannte Äquivalenz nur für $a > 0$.



Zeichne im Schaubild folgende Zusammenhänge ein:

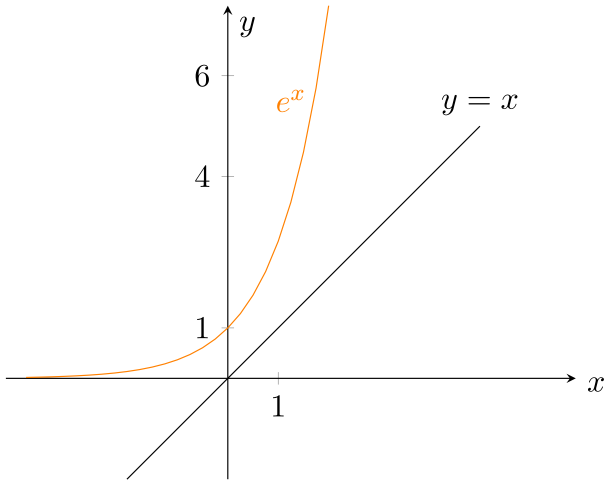
$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^b = a.$$

Überlege dir anhand der Winkelhalbierenden worauf eine Zahl a von der Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$ abgebildet werden muss.

Wie kannst du den Umstand

$$g(b) = a \text{ und } f(a) = b$$

im Koordinatensystem markieren? Zeichne damit den Graphen von $f(x) = \ln(x)$.



Hier erkennen wir für $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \exp(x)$ den Zusammenhang $e^b = a$ und $\ln(a) = b$. Die grafische Konstruktion von Umkehrfunktionen über die Winkelhalbierende verwenden wir, um folgende Regel herzuleiten:

$$a = e^{\ln(a)}, \qquad b = \ln(e^b).$$

Wir sagen, dass $\ln(a)$ für $a > 0$ genau die Zahl ist die die Gleichung $e^x = a$ löst. Dementsprechend ist e^b genau die Zahl die $\ln(x) = b$ löst.

Aufgabe 1.8

Löse die Gleichung $\ln(\frac{1}{2}x) = 5$.

Aufgabe 1.9

Löse die Gleichung $\ln(3x) = \ln(x + 3)$.

Aufgabe 1.10

Löse die Gleichungen.

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 4^x = 9 \\
(ii) \quad & 4 \cdot 2^{2x-1} - 1 = 31 \\
(iii) \quad & 8^{x^2-4x+7} = 512 \\
(iv) \quad & \frac{5 + \log_5(3x + 83)}{4} = 2 \\
(v) \quad & \log_{10}(5x^2 + 5x) = 1 \\
(vi) \quad & \frac{3}{\ln(4x - 7)} = -6
\end{aligned}$$

Lösung: (i) $x = \frac{\ln(9)}{\ln(4)}$, (ii) $x = 2$, (iii) $x = 2$, (iv) $x = 14$, (v) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, (vi) $x = \frac{e^{-0,5}+7}{4}$.