4 Integralrechnung

4.1 Das bestimmte Integral

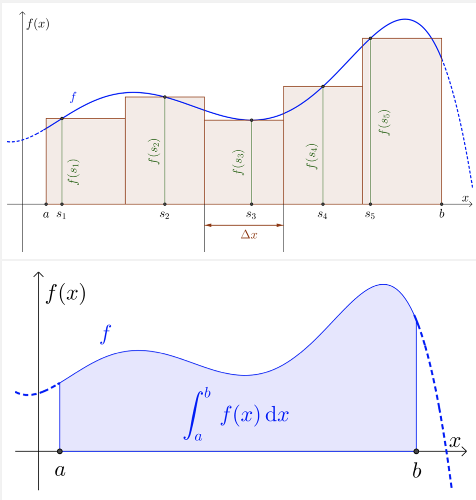
Wie war das nochmal?

Gegeben sei eine Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar ist. Unter dem *bestimmten Integral* von f über dem Intervall $[a, b]$ versteht man den orientierten Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von f zwischen den Grenzen a und b.

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Das dx repräsentiert symbolisch daher die immer kleiner werdende Breite Δx der Rechtecke, wie in der Abbildung zu sehen.



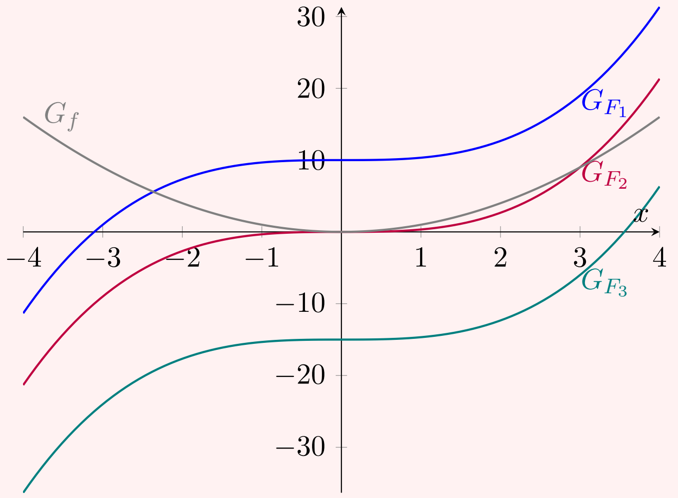
Quelle: Wien Kompetenzheft Integralrechnung, S. 16.

Was war nochmal eine Stammfunktion?

Gegeben sei eine Funktion f. Eine Funktion F für die gilt $F' = f$, nennen wir *Stammfunktion* von f.

Merke

Die Stammfunktion ist eindeutig bis auf eine Konstante c, die beim Ableiten wegfällt. Als Beispiel findest du in der Abbildung die Graphen der Funktion f und drei möglicher Stammfunktionen F_1, F_1 und F_1. Dabei gilt $f(x) = x^2$ und $F_i(x) = \frac{1}{3}x^3 + c_i$ mit $c_1 = 10$, $c_2 = 0$ und $c_3 = -15$.



Oft benötigen wir die folgenden Stammfunktionen:
Seien $a, b, c, d, k, n \in \mathbb{R}$ und $d, k \neq 0$.

$f(x)$	$F(x)$
$a \cdot x^n; n \neq -1$	$a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{k \cdot x + b}$	$\frac{1}{k} \ln\lvert k \cdot x + b\rvert + c$
$a \cdot e^{k \cdot x + b}$	$\frac{a}{k} \cdot e^{k \cdot x + b} + c$
$a \cdot \sin(d \cdot x)$	$-\frac{a}{d} \cdot \cos(d \cdot x) + c$
$a \cdot \cos(d \cdot x)$	$\frac{a}{d} \cdot \sin(d \cdot x) + c$

Aufgabe 4.0

Gebe je eine Stammfunktion für die folgenden Funktionen an.

1. $f_1(x) = -12(2x-3)^2$
2. $f_2(x) = \frac{4}{(2x-3)^2}$
3. $f_3(x) = 2 \cdot \sqrt{2x+1}$
4. $f_4(x) = 6 \cdot e^{3x+2}$
5. $f_5(x) = 3 \cdot \sin(3x-9)$
6. $f_6(x) = \frac{2}{3} \cdot \cos(\pi x)$

Aufgabe 4.1

Gib diejenige Stammfunktion F_i zur Funktion f_i an, für die gilt $F_i(1) = -1$.

1. $f_1(x) = e^{2x-2}$
2. $f_2(x) = \cos(x-1)$

Merke

Wir nennen $\int f(x)\,dx$ das *unbestimmte Integral*. Durch Hinzufügen von Grenzen, $\int_a^b f(x)\,dx$, erhalten wir das *bestimmte Integral*.

Merke

Seien f und g integrierbare Funktionen mit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ mit $c \in [a, b]$
2. $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ mit $c \in \mathbb{R}$
3. $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Achtung: Punkt 3 lässt sich im Allgemeinen **nicht** auf die Verknüpfung „·“ übertragen. In der Regel gilt $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Merke

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f integrierbar. Die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von f.

(b) Ist f eine auf $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Aufgabe 4.2*

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.

1. Bestimme mithilfe der nachstehenden Wertetabelle $F(5) - F(3)$.
2. Finde passende $a, b \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $\int_a^b f(t)\,dt = F(5) - F(3)$.
3. Finde passende $a, b \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $\int_a^b f(t)\,dt = 34$.

x	$F(x)$
1	0
2	2
3	12
4	36
5	80

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 83)

Berechne mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

(a) $\int_{-1}^{2} (2x^3 + 1)\,dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\,dx$

Aufgabe 4.3*

Der Graph der Funktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F sind dargestellt.

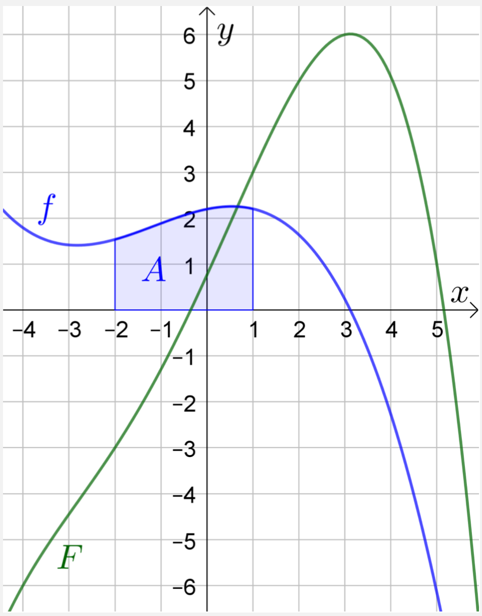
(a) Ermittle den markierten Flächeninhalt A mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(b) Ermittle $\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$.

(c) Ermittle $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$.

(d) Ermittle $\int_1^5 f(x)\,dx$. Warum ist das Ergebnis negativ?

(e) Begründe, wie viele Wendestellen F im dargestellten Bereich hat.



Quelle: Wien Aufgabensammlung Integralrechnung, S. 15.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 81)

Sei f eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar ist. Sei f' die Ableitung von f. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung, aber viele Stammfunktionen.

(b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f.

(c) Ist eine F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.

(d) Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

Aufgabe 4.4*

Die Geschwindigkeit beim Bremsvorgang eines Autos kann durch die Funktion

$$v(t) = 36 - 12t$$

modelliert werden, wobei v die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t seit Beginn des Bremsens in m/s angibt.

(a) Wie lange dauert es, bis das Auto zum Stillstand kommt?

(b) Sei s die zugehörige Funktion, die den Weg in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Es gilt $s'(t) = v(t)$ und $s(0) = 0$. Ermittle eine Gleichung der Funktion s.

(c) Bestimme die Länge des Bremswegs.

Aufgabe 4.5

Finde $a, b \in \mathbb{R}$, für die gilt

1. $\int_1^b 4x\,dx = 30$
2. $\int_a^{10} 2x\,dx = 19$