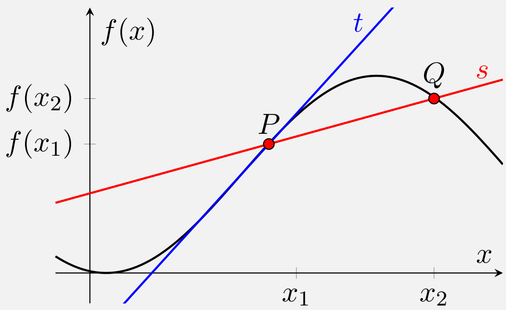
3 Differentialrechnung

3.1 Grenzwert und Ableitung

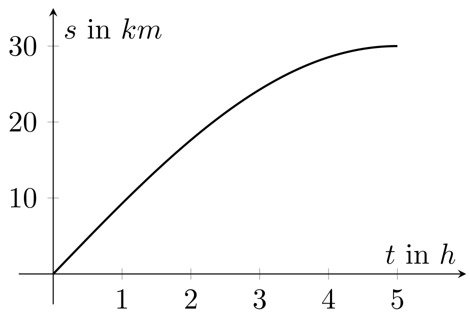
Wie war das nochmal?

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Eine Gerade, die den Graphen von f im Punkt $P(x_1|f(x_1))$ berührt heißt *Tangente* t an den Graphen von f im Punkt P.
Eine Gerade, die den Graphen von f in den Punkten $P(x_1, f(x_1))$ und $Q = (x_2, f(x_2))$ schneidet heißt *Sekante* s an den Graphen von f durch die Punkte P und Q.



Wie schnell?

Ein Wanderer verfolgt seine Route über GPS. Eine App gibt die zurückgelegte Strecke pro Zeit an. Wir können die zurückgelegte Strecke als Funktion s in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ angeben.

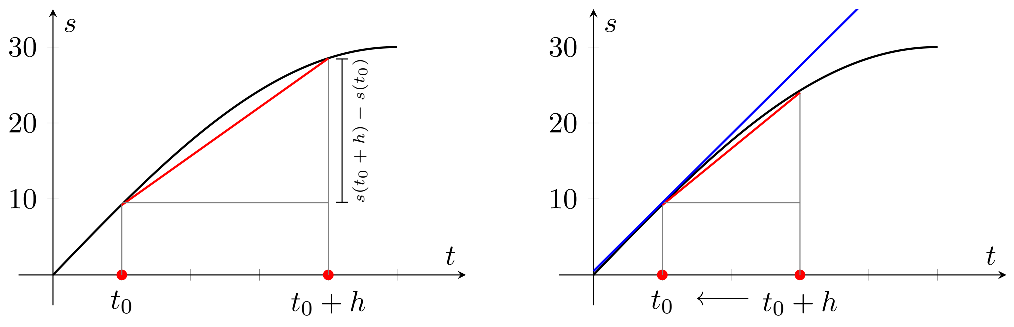


Der Wanderer weiß, dass er in fünf Stunden 30 Kilometer gelaufen ist, er hatte also eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $\frac{30km}{5h}$.

Zeichne ein, wie man die durchschnittliche Geschwindigkeit des Wanderers grafisch bestimmen kann.

Nun interessiert sich der Wanderer dafür, wie schnell zu einem bestimmten Zeitpunkt unterwegs war. Kann er obige Konstruktion auch anwenden um seine Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ zu ermitteln?

Wie können wir grafisch die Steigung an einer Stelle $t_0 \in (0, 5)$ bestimmen?
Hinweis: Betrachte die Intervallgrenzen über die der Durchschnitt gebildet wird.



Die durchschnittliche Geschwindigkeit über dem Intervall $[t_0, t_0+h]$ ist:

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{(t_0+h)-t_0},$$

wobei $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Je kleiner wir h wählen, desto näher rückt t_0+h auf der x-Achse zu t_0. Berechnen wir die durchschnittliche Geschwindigkeit auf einem immer kleiner werdenden Intervall, so erhalten wir ein Ergebnis das der *momentanen Änderungsrate* zum Zeitpunkt t_0 immer näher kommt.

Animation

Geogebra

Das erkennen wir im Bild, die Sekante über $[t_0, t_0+h]$ gleicht sich immer weiter der Tangente in t_0 an. Weshalb können wir nicht einfach $h = 0$ wählen, um die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu berechnen?

Merke

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

der *Differenzenquotient* von f im Intervall $[a, b]$. Dieser beschreibt die Steigung einer *Sekante* an den Graphen von f durch die Punkte a und b.

Wir haben oben h immer kleiner werden lassen und dafür den Differenzenquotienten betrachtet. Wie können wir diesen Umstand mathematisch beschreiben? Aus der Schule kennen wir dafür folgenden Ansatz.

Merke

Der Grenzwert einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für x *gegen* $c \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert, dem die Funktion sich annähert, wenn x beliebig nahe an c liegt. Man schreibt hierfür auch

$$\lim_{x\to c} f(x).$$

Was bedeuten die hier verwendeten Aussagen *...dem die Funktion sich annähert,...* und *...x beliebig nahe an c liegt* genau? Wir möchten aussagen, dass die Funktionswerte $f(x)$ dem Wert x_0 beliebig nahe kommen (also: $|f(x) - x_0| < \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$), wenn wir x nahe genug an c wählen (also: $|x - c| < \delta$ für ein $\delta > 0$). Damit erhalten wir folgende Definition des Grenzwertes.

Merke

Für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in [a, b]$ ist der *Grenzwert:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = x_0$$

falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus

$$0 < |x - c| < \delta$$

schon folgt, dass

$$|f(x) - x_0| < \epsilon.$$

Aufgabe 3.0

Überlege dir die folgenden Punkte:

(a) Was versteht man unter einem Grenzwert?

(b) Weshalb wird dann aus der Sekante eine Tangente?

(c) Welche Eigenschaft muss die Funktion dafür besitzen?

(d) Wie hängen Differenzenquotient und Differentialquotient zusammen?

Merke

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt der folgende Grenzwert,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

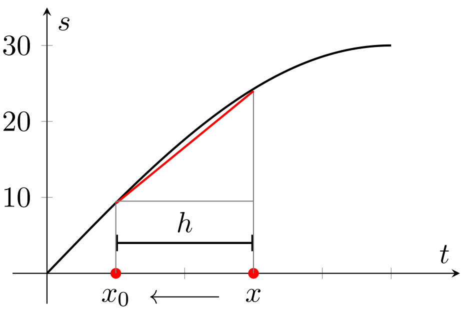
der *Differentialquotient* von f in x. Beachte dass der Grenzwert nicht existieren muss. Der Differentialquotient ist die Steigung der *Tangente* an den Graphen von f an der Stelle x und gibt die *momentane Änderungsrate* der Funktion an der Stelle x an. Wir sagen f ist *differenzierbar*, wenn der Differentialquotient für alle x im Definitionsbereich von f existiert.
Ist f differenzierbar, so heißt die Funktion

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

die *Ableitungsfunktion* von f.

Fassen wir h wie oben gesehen als Abstand zweier Werte x_0 und x auf können wir den Differentialquotienten auch umschreiben zu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Aufgabe 3.1

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|.$$

Betrachte den Differentialquotienten in $x = 0$. Was bedeutet dies für die Differenzierbarkeit von f in 0?

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 70)

Gib die Grenzwerte der folgenden Funktionen an.

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ mit $f(x) = \frac{2}{x+2}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ mit $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ mit $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ mit $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 71)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, falsch oder unentscheidbar? Begründe deine Antwort.

(a) Gilt für eine Funktion f, dass sie an der Stelle 2 den Funktionswert 1 hat, so ist $f'(2) = 1$.

(b) Ist $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.

(c) Die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2 + 2$ an der Stelle -3 ist positiv.

Ein paar Ableitungen

Potenzregel

Für eine Funktion $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1}.$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Wie können wir uns da sicher sein?

Versuche mit der Definition der Ableitung die Potenzregel zu beweisen.

Hinweis: Führe dir noch einmal das Verfahren der Polynomdivision vor Augen, an welcher Stelle kannst du es hier anwenden?

Polynomdivision

Youtube

Ableitungsregeln

Für differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a \cdot g(x) \implies f'(x) = a \cdot g'(x) \tag{I}$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \implies f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{II}$$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \implies f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \tag{III}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \implies f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \tag{IV}$$

$$f(x) = g(h(x)) \implies f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \tag{V}$$

Aufgabe 3.2

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Welche Ableitungsregel kommt hier zum Einsatz?
Wende sie an und bestimme $f'(x)$.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 75)

Bestimme die Ableitungen der unten stehenden Funktionen und gebe an, welche Regeln hierbei zum Einsatz kommen.

(a) $f(x) = x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = e^5$

(c) $f(x) = (1 - x^2)^9$

(d) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin(x)$