3.2 Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen ihrer Ableitungsfunktion

Merke

Man kann den Graphen einer Ableitungsfunktion $G_{f'}$ zeichnen, ohne den Funktionsterm der Ableitung zu kennen. Dafür kann der wesentliche Verlauf der Funktion anhand folgender Kriterien betrachtet werden: das Monotonieverhalten, das Verhalten im Unendlichen und die Lage der Extrem- und Wendepunkte. Folgende Zusammenhänge gelten für charakteristische Punkte einer Funktion f mit ihren Ableitungsfunktionen f', f'' und f''':

G_f	$G_{f'}$
Hochpunkt	Nullstelle ($f'(x) = 0$) mit VZW von $+$ nach $-$ (d. h. $f''(x) < 0$)
Tiefpunkt	Nullstelle ($f'(x) = 0$) mit VZW von $-$ nach $+$ (d. h. $f''(x) > 0$)
Sattelpunkt	Nullstelle ($f'(x) = 0$) ohne VZW (d. h. $f''(x) = 0$), (Extrempunkt auf der x-Achse)
Wendepunkt	Extrempunkt ($f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$)

Aufgabe 3.0*

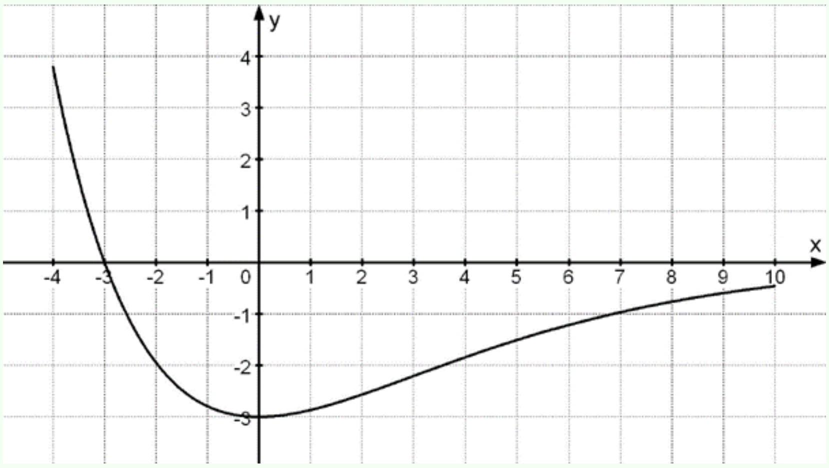
Die erste Ableitung einer Funktion f hat die Gleichung $f'(x) = (x+2) \cdot (x-1)^2 \cdot (x-4)$. Skizziere das Schaubild der Funktion f' und kreuze die richtigen Eigenschaften von f und f' an.

	f'	f
$x < -2$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = -2$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$-2 < x < 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = 1$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$1 < x < 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘
$x = 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Hochpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Sattelpunkt
$x > 4$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ ↗ ☐ ↘

Quelle: Wien Arbeitsblatt Kurvenuntersuchungen I

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 72)

Die Abbildung zeigt für $-4 \leq x \leq 10$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.

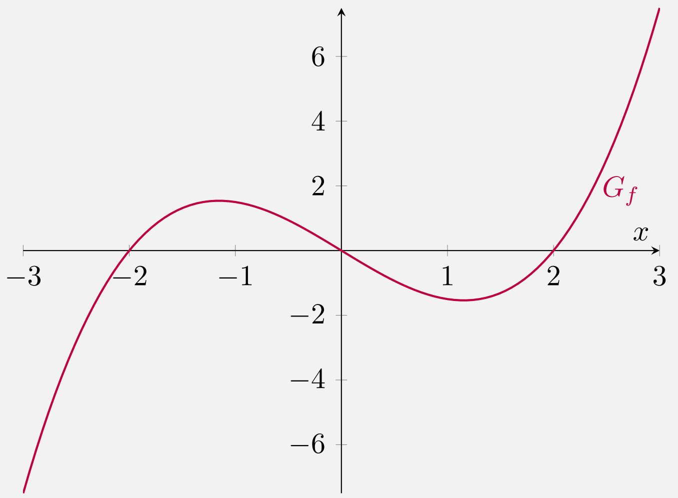


Entscheide und begründe, ob gilt:

1. Die Funktion h ist auf dem Intervall $-3 < x < 10$ streng monoton fallend.
2. Die Funktion h hat an der Stelle -3 ein Minimum.
3. $x = 0$ ist eine Wendestelle von h.

Aufgabe 3.1

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f'.



Merke

Man kann mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion f'' einer Funktion f Aussagen über die Krümmung von G_f treffen. Folgendes gilt:

- Ist $f''(x) > 0$, so ist G_f in x links-/positivgekrümmt (konvex).
- Ist $f''(x) < 0$, so ist G_f in x rechts-/negativgekrümmt (konkav).

Aufgabe 3.2*

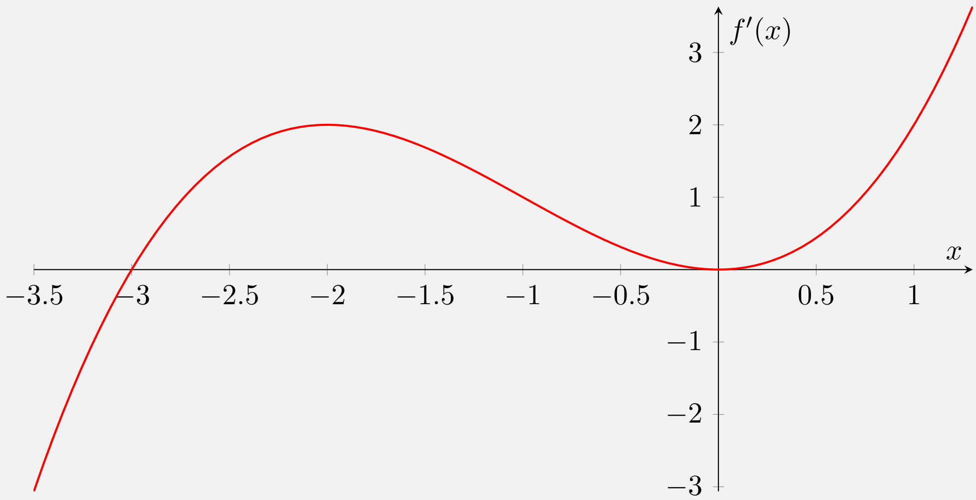
Die zweite Ableitung einer Funktion h hat die Gleichung $h''(x) = x^2 \cdot (x - 5)$. Kreuze die zutreffenden Eigenschaften von h'' und G_h an.

	h''	h
$x < 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ + ☐ −
$x = 0$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$0 < x < 5$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ + ☐ −
$x = 5$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ Wendepunkt ☐ kein Wendepunkt
$x > 5$	☐ $= 0$ ☐ > 0 ☐ < 0	☐ + ☐ −

Aufgabe 3.3 (aus Abitur Baden-Württemberg 2015)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f. Entscheide und begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.
2. $f(-2) < f(-1)$
3. $f''(-2) + f'(-2) < 1$
4. Der Grad der Funktion f ist mindestens vier.



3.3 Optimierung

Merke

Um eine *Optimierungsaufgabe* (auch als *Extremwertproblem* bezeichnet) lösen zu können, kann man nach folgendem Schema vorgehen:

1. Zunächst wird ein Term aufgestellt, der die Größe beinhaltet, die extremal werden soll. Dieser Term darf auch mehrere Variablen enthalten.
2. Anschließend werden die Nebenbedingungen formuliert. Diese beschreiben Abhängigkeiten der Variablen untereinander.
3. Dann wird mithilfe der Nebenbedingung die Zielfunktion bestimmt. Diese hängt dann nur noch von einer Variablen ab. Vergiss nicht, den Definitionsbereich mitanzugeben.
4. Als nächstes kann man die Zielfunktion durch Ableiten auf Extremwerte untersuchen, je nachdem, ob man etwas minimieren oder maximieren möchte.

Tipp: Beachte auch die Werte an den Rändern der Definitionsmenge!

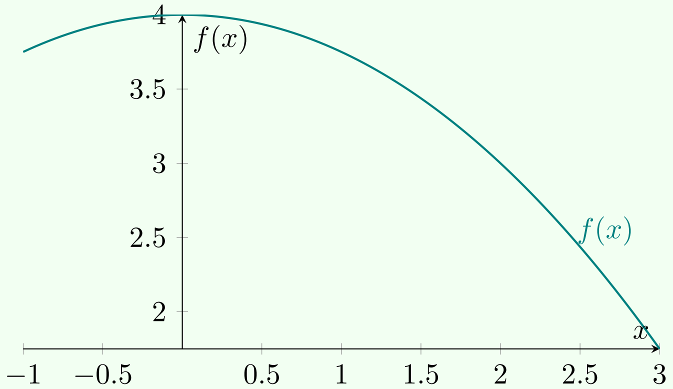
5. Schließlich wird das Ergebnis formuliert.

Beispiel. Die Summe von zwei Zahlen x und y beträgt 16. Das Produkt der beiden Zahlen soll möglichst groß werden. Wie müssen die Zahlen x und y gewählt werden?

1. Betrachtet wird die Funktion P mit $P(x, y) = x \cdot y$.
2. Die Nebenbedingung lautet $x + y = 16$, das heißt $y = 16 - x$.
3. Durch Einsetzen der Nebenbedingung in $P(x, y)$ erhält man die Zielfunktion, die dann nur noch von einer Variablen abhängt: $P(x) = x \cdot (16 - x) = 16x - x2$.
4. Nun wird die Funktion $P(x)$ auf Extremwerte untersucht. Da das Produkt maximal werden soll, ist ein Hochpunkt der Funktion gesucht. Rechne:
   $P'(x) = 16 - 2x = 0 \Longleftrightarrow 16 = 2x \Longleftrightarrow x = 8$
   $P''(x) = -2 < 0 \Rightarrow P''(8) < 0$, d. h. an der Stelle $x = 8$ hat $P(x)$ ein Maximum.
5. Das Produkt $x \cdot y$ wird für $x = 8$ maximal. Für y gilt dann gemäß der Nebenbedingung $y = 16 - x = 16 - 8 = 8$. Das maximale Produkt beträgt also $8 \cdot 8 = 64$.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 78)

Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen, ein Eckpunkt auf dem abgebildeten Stück der Parabel $f(x) = -0,25x^2 + 4$. Wie groß müssen die Seitenlängen dieses Rechtecks sein, damit sein Umfang maximal wird? Wie groß ist dann der Umfang?



Aufgabe 3.4**

Ein Verlag verlangt für die Lieferung einer Tageszeitung monatlich 25 Euro. Eine Umfrage hat ergeben, dass sich der durchschnittliche Absatz von bisher 50.000 Exemplaren bei einer Preissenkung von 1 Euro pro Monat jeweils um 3000 Exemplare erhöhen würde. Bei welchem Preis sind die monatlichen Einnahmen am größten?

Aufgabe 3.5**

Ein oben offener Regenwasserspeicher im Form eines Zylinders soll 1000 Liter fassen. Wie müssen Grundkreisradius und Höhe gewählt werden, wenn der Blechverbrauch möglichst klein sein soll?

Aufgabe 3.6**

In ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge l soll, anliegend an eine Seite, ein Rechteck mit möglichst großer Fläche platziert werden. Wie müssen die Rechteckseiten a und b gewählt werden?