2 Funktionen

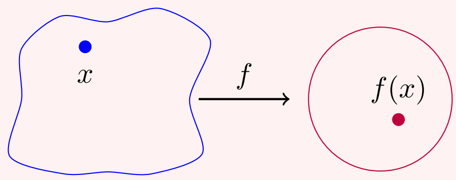
Eigenschaften

Merke

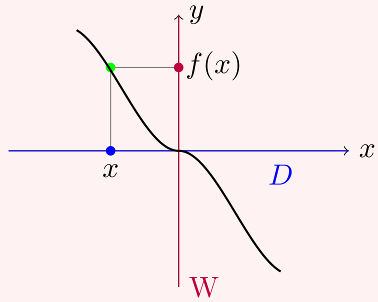
Eine Funktion

$$f : {\color{blue}D} \to {\color{purple}W}, \quad x \mapsto f(x)$$

bildet jeden Punkt x aus dem *Definitionsbereich* D auf einen eindeutigen Punkt $f(x)$ aus dem *Wertebereich* W ab.

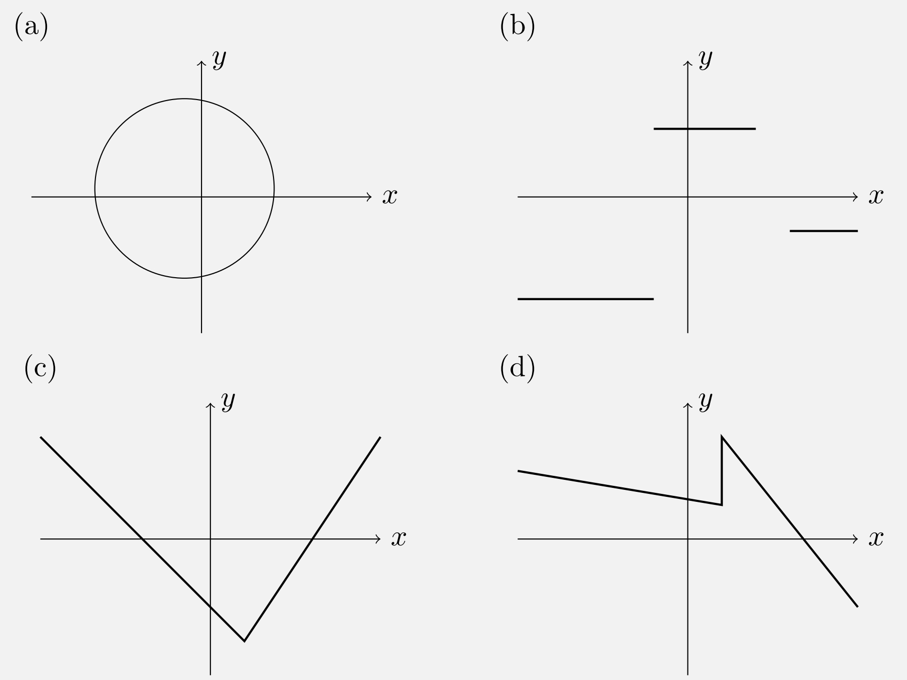


Für Funktionen mit ${\color{blue}D = \mathbb{R}}$ und ${\color{purple}W = \mathbb{R}}$ können wir alle Punkte $(x|f(x))$ in ein Koordinatensystem einzeichnen, in dem wir für ${\color{blue}D}$ die x-Achse und für ${\color{purple}W}$ die y-Achse wählen. Die Punkte $(x|f(x))$ bilden dann den *Funktionsgraphen*.



Aufgabe 2.0

Entscheide und begründe, bei welchen der folgenden Graphen es sich um Graphen einer Funktion mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ handelt.



2.1 Quadratische Funktionen

Merke

Eine *quadratische Funktion* f ist von der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Dabei muss gelten $a \neq 0$, da die Funktion ansonsten nicht mehr von Grad 2 ist. Bei b, c handelt es sich um beliebige reelle Zahlen. Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man eine *Parabel*.

Aufgabe 2.1

Betrachte die quadratische Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Bestimme die Definitions- und Wertemenge der Funktion. Ergänze dafür die folgende Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

Merke

Um Nullstellen einer quadratischen Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

berechnen zu können, benötigen wir die Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diese liefert entweder keine, eine oder zwei Lösungen.

Aufgabe 2.2

Begründe, in welchen Fällen die Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

keine, eine oder zwei Lösungen liefert und wie die entsprechenden Funktionsgraphen aussehen.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 37)

Bestimme die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Merke

Um zu sehen, dass eine Funktion $f(x) \begin{cases} \textit{monoton steigt} \\ \textit{streng monoton steigt} \end{cases}$,

muss für die Ableitung gelten: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f'(x) > 0 \end{cases}$.

Um zu sehen, dass eine Funktion $f(x) \begin{cases} \textit{monoton fällt} \\ \textit{streng monoton fällt} \end{cases}$,

muss für die Ableitung gelten: $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ f'(x) < 0 \end{cases}$.

Aufgabe 2.3

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

2.2 Polynomfunktionen

Merke

Ein *Monom* ist ein mathematisches Objekt, das aus einer Zahl, dem *Koeffizienten* und der Potenz einer Variablen besteht, die durch Multiplikation miteinander verbunden sind. Summieren wir endlich viele dieser Monome auf, erhalten wir ein

Polynom.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eine Polynomfunktion ist eine Funktion, deren Abbildungsvorschrift durch ein Polynom gegeben ist.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \end{aligned}$$

Für $a_n \neq 0$ nennen wir n den *Grad* des Polynoms. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes Polynom von Grad $n \geq 1$ höchstens n reelle Nullstellen.

Für die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto 2x^3 + (-5)x + 2 \end{aligned}$$

schreiben wir auch $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$.
Mache dir klar, weshalb es sich bei f um eine Polynomfunktion handelt, indem du die Exponenten der Variable und die Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$ identifizierst.

Übrigens...

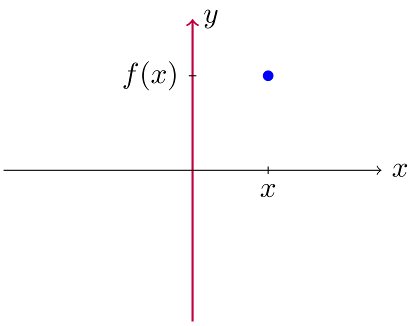
Im Allgemeinen kann in einer Polynomfunktion eine beliebige endliche Anzahl von Variablen vorkommen. Zum Beispiel:

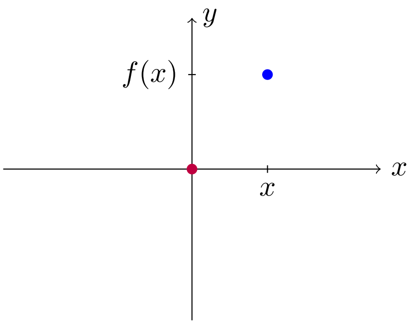
$$f(x, y, z) = x^2 + yz.$$

Wir wollen uns hier jedoch auf den Fall nur einer Variablen beschränken.

Symmetrie

Der Punkt $P(x/f(x))$ liege auf dem Graphen einer Funktion. Markiere wo der Graph einen weiteren Punkt besitzen muss, damit er achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.
Drücke mit einer Gleichung aus was damit für f gelten muss.





Bertrachte erneut den Punkt $P(x/f(x))$ auf dem Graphen von f. Markiere wo der Graph einen weiteren Punkt besitzen muss, damit er punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft.
Was muss damit für f gelten?

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 62g)

Zeige oder widerlege die folgende Aussage.

> Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 2.4

Zeige:

(i) Wenn die Exponenten der Variable alle gerade sind, so verläuft der Graph einer Polynomfunktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

(ii) Wenn die Exponenten der Variable alle ungerade sind so verläuft der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beachte zu welchem Fall der Exponent Null gehört.

Bestimmen von Nullstellen

Merke

Wir können mit der Mitternachtsformel bereits Nullstellen von Polynomen von Grad zwei bestimmen. Haben Polynome von höherem Grad eine bestimmte Form, so können wir diese vereinfachen um Nullstellen zu finden.

Satz vom Nullprodukt

Ist f von der Form

$$f(x) = g(x)h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

so gilt:

$$f(x_1) = 0 \iff g(x_1) = 0 \text{ oder } h(x_1) = 0.$$

Substitution

Sind alle Potenzen von f Vielfache voneinander, so können wir die Nullstellen von f nach Substitution mit der Mitternachtsformel bestimmen.

Ausklammern

Haben alle Monome einer Polynomfunktion f mindestens Grad $k \in \mathbb{N}$ so können wir schreiben:

$$f(x) = x^k \cdot f(x^{-k}).$$

Verwende dann den Satz vom Nullprodukt zum Bestimmen von Nullstellen.

Aufgabe 2.5*

Gib den Grad des Polynoms an. Mit welchem Verfahren lassen sich jeweils am einfachsten die Nullstellen der Polynome bestimmen?

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad f(x) = x^6 - 7x^3 - 8 \\
(ii) &\quad p(x) = 42 \cdot (x+7) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 + 4x - 5) \\
(iii) &\quad h(x) = 2x^5 - 4x^4 - 30x^3
\end{aligned}
$$

Ausblick

Lassen wir in der Definition einer Polynomfunktion auch negative Exponenten zu, so erhalten wir eine *gebrochenrationale Funktion.*

Beispiel:

$$f(x) = 3x^{-3} - 5x^{-1} + x^2 = \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x} + x^2.$$

Um diesen Unterschied zu verdeutlichen spricht man bei Polynomfunktionen auch von *ganzrationalen Funktionen.*

2.3 Exponential- und Logarithmusfunktion

Wie schnell wächst das alles?

Wir arbeiten im Labor und haben nun eine Kultur von Coronaviren. Die Anzahl der Viren wächst dabei stündlich um 60% an, ihr *Wachstumsfaktor* a ist also $1,6$. Zu Anfang haben wir nun 10 Millionen Viren in unserer Petrischale, nach n Stunden ist deren Bestand gegeben durch

$$B(n) = 10 \cdot 1,6^n.$$

Nach einer weiteren Stunde sieht die Bestandsformel folgendermaßen aus:

$$B(n+1) = 10 \cdot 1,6^{n+1} = 10 \cdot 1,6^n \cdot 1,6 = 1,6 \cdot B(n) = a \cdot B(n).$$

Der Bestand nach $n+1$ Stunden hängt also wesentlich vom Bestand nach n Stunden ab. Betrachten wir nun nicht nur den Bestand zu vollen Stunden, sondern lassen jeden beliebigen Zeitpunkt zu (also auch 1,62 Stunden oder auch π Stunden) so führt uns dies zur Exponentialfunktion.

Merke

Eine Funktion f von der Form

$$f(x) = c \cdot a^x$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $1 \neq a > 0$ heißt *Exponentialfunktion* mit Basis a. Wir bezeichnen a hier auch als den *Wachstumsfaktor* der Exponentialfunktion f.

Aufgabe 2.6

Stelle für die folgenden Sachverhalte den Term zu Exponentialgleichung $f(x)$ auf.

(a) Es sind 500 Euro auf einem Sparbuch, die stetig mit einem Zinssatz von 3% verzinst werden.

(b) Ein $50cm$ hoher Dill wächst täglich um 2%. Wie hoch ist er zum Tag x?

(c) Eine Schnecke ist $10m$ von Maries Haus entfernt und entfernt sich täglich um weitere 17%. Wie weit ist sie zum Tag x entfernt?

Aufgabe 2.7

Der positive Wachstumsfaktor a muss stets von 1 verschieden sein. Was passiert mit dem Bestand unserer Bakterienkultur aus dem einführenden Beispiel, wenn

(a) $a < 1$ ist?

(b) $a > 1$ ist?

Merke

Ist der Wachstumsfaktor a der Exponentialfunktion größer als 1, so sprechen wir von *exponentiellem Wachstum*. Ist a hingegen kleiner 1, so sprechen wir von *exponentiellem Zerfall*.

Aufgabe 2.8

Welchen Definitionsbereich hat die Exponentialfunktion B aus unserem Anfangsbeispiel für eine beliebige Basis $1 \neq a > 0$? Überlegt euch hierzu die folgenden Punkte.

(a) Was gibt $B(x)$ für ein positives $x \in \mathbb{R}$ an?

(b) Was gibt $B(x)$ für ein negatives $x \in \mathbb{R}$ an?

(c) Gibt es Zahlen $x \in \mathbb{R}$, welche wir lieber nicht im Definitionsbereich zulassen sollten?

(d) Gelten diese Aussagen für allgemeine Basen $1 \neq a > 0$?

Aufgabe 2.9

Welchen Wertebereich hat die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ für $1 \neq a > 0$? Überlegt euch hierzu die folgenden Punkte

(a) Welche Werte nimmt f für positive $x \in \mathbb{R}$ an?

(b) Welche Werte nimmt f für negative $x \in \mathbb{R}$ an?

(c) Kann die Exponentialfunktion den Wert 0 annehmen?

(d) Schlussfolgere daraus den Wertebereich der Exponentialfunktion.

Merke

Die Exponentialfunktion hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und die positiven reellen Zahlen als Wertebereich, also $W = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Im Besonderen hat sie also auch keine Nullstellen.

Merke

Oft wird die Exponentialfunktion zur Basis

$$e = 2,718281828459045235360287471352...$$

betrachtet. Die irrationale Zahl e wird auch *eulersche Zahl* genannt. Im Folgenden ist mit $exp(x) := e^x$ die Exponentialfunktion zur Basis e gemeint.

Merke

Die Lösung x der Gleichung

$$b^x = a \qquad \text{mit } a, b > 0, b \neq 1$$

heißt *Logarithmus von a zur Basis b*. Die *Logarithmusfunktion* ist nun durch

$$\log_b(a) = x$$

definiert. Ist die Basis hierbei die eulersche Zahl e, so schreibt man $\log_e(a) = \ln(a)$.

Aufgabe 2.10

Welchen Definitionsbereich hat die Logarithmusfunktion für eine beliebige Basis $1 \neq b > 0$? Überlegt euch hierzu die folgenden Punkte.

(a) Wie lässt sich $\log_b(x)$ für ein positives $x \in \mathbb{R}$ aus unserem Anfangsbeispiel interpretieren?

(b) Gibt es Probleme im Ausdruck $\log_b(x)$ für ein negatives $x \in \mathbb{R}$?

(c) Gibt es Zahlen $x \in \mathbb{R}$, welche wir also lieber nicht im Definitionsbereich zulassen sollten?

(d) Gelten diese Aussagen für allgemeine Basen $1 \neq b > 0$?

Aufgabe 2.11

Welchen Wertebereich hat die Logarithmusfunktion $\log_b$ für eine beliebige Basis $1 \neq b > 0$? Überlegt euch hierzu die folgenden Punkte.

(a) Kann $\log_b$ negative Werte annehmen?

(b) Nimmt $\log_b$ alle positiven Werte an?

(c) Schlussfolgere daraus den Wertebereich der Logarithmusfunktion.

Aufgabe 2.12

Wir überlegen uns nun einige Eigenschaften der Logarithmusfunktion.

(a) Wie hängen Werte- und Definitionsbereich der Logarithmus- und Exponentialfunktion zusammen?

(b) Gibt es $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x < y$, für die $\log_b(x) \geq \log_b(y)$ gilt?

(c) Schlussfolgere daraus, ob die Logarithmusfunktion ein Maximum oder Minimum besitzt.

(d) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstelle, wie sieht dies bei der Logarithmusfunktion aus?

Merke

Die Logarithmusfunktion $\log_b(x)$ besitzt keine Maxima und Minima. Sie weist auch keine Symmetrie auf, hat aber eine Nullstelle bei $x = 1$.

Aus dem Mindestanforderungskatalog (Aufgabe 65)

Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet $n(t) = n_0 e^{-kt}$.
Die Zahl $n(t)$ gibt die Anzahl der Atome nach t Zeiteinheiten wieder, $n_0 = n(0)$ ist der Bestand an Atome n zur Zeit $t = 0$. Die Zahl $k < 0$ ist die Zerfallskonstante mit der Einheit 1/Zeiteinheit.
Ermitteln Sie die Halbwertszeit t_h, nach der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat. Nach welcher Zeit, ausgedrückt in Halbwertszeiten, sind von dem radioaktiven Stoff nur noch 25%, 5% beziehungsweise 1% vorhanden?