Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II SS 10

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 3**

Aufgabe 1

Es seien $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $q : \mathbb{N}^{m+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Weiterhin seien $r_1, \ldots, r_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ so definiert, daß für alle $x, y \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m$ jeweils $r_i(x, y) \leq y$ ist. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ werde durch *Wertverlaufsrekursion* definiert, d.h. durch das Schema

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ f(x,y') &= q(x,y,f(x,r_1(x,y)),\ldots,f(x,r_m(x,y))) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß f primitiv-rekursiv ist, falls $g, q, r_1, \ldots, r_m$ primitiv-rekursiv sind.

b) Definieren Sie eine Funktion, welche durch Wertverlaufsrekursion die Fibonacci-Folge (von einem geeigneten Anfangswert an) berechnet.

Aufgabe 2

Die Klasse der *elementaren Funktionen* umfaßt die Grundfunktionen $C_1^1, U_i^n, +, \times, -$. Aus diesen Grundfunktionen können durch Komposition, *beschränkte Summe* und *beschränktes Produkt* neue elementare Funktionen erzeugt werden. Die Komposition entspricht exakt der von den primitiv rekursiven Funktionen her bekannten Bildungsvorschrift. Die beschränkte Summe Σ_f und das beschränktes Produkt Π_f einer elementaren Funktion f sind durch folgende Gleichungen erklärt:

$$\begin{aligned} \Sigma_f(\vec{x},0) &= f(\vec{x},0) \\ \Sigma_f(\vec{x},y') &= +(\Sigma_f(\vec{x},y),f(\vec{x},y')) \\[1em] \Pi_f(\vec{x},0) &= f(\vec{x},0) \\ \Pi_f(\vec{x},y') &= \times(\Pi_f(\vec{x},y),f(\vec{x},y')) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß folgende Funktionen zur Klasse der elementaren Funktionen gehören:

a) die konstante Nullfunktion C_0^1,

b) die Nachfolgerfunktion N,

c) die Signumfunktion $\mathbf{sg}$ und die Cosignumfunktion $\overline{\mathbf{sg}}$,

d) die charakteristischen Funktionen der Relationen $<, \leq$ und $=$,

e) die Potenzfunktion **exp** und die Fakultätsfunktion **fak**,

f) die Funktion **bin** mit $\mathbf{bin}(x,y) = \binom{x}{y}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, daß die Funktionen **div** : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (Ganzzahldivision) und **mod** : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, (Rest bei der Ganzzahldivision) zur Klasse der elementaren Funktionen gehören.