Aufgabe 4

Es seien $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und $q : \mathbb{N}^{m+2} \longrightarrow \mathbb{N}$. Weiterhin seien $r_1, \ldots, r_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ so definiert, daß für alle $x, y \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq m$ jeweils $r_i(x, y) \leq y$ ist. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ werde durch *Wertverlaufsrekursion* definiert, d.h. durch das Schema

$$\begin{array}{rcl} f(x,0) & = & g(x) \\ f(x,y') & = & q(x,y,f(x,r_1(x,y)),\ldots,f(x,r_m(x,y))) \end{array}$$

1. Zeigen Sie, daß f primitiv-rekursiv ist, falls $g, q, r_1, \ldots, r_m$ primitiv-rekursiv sind.
2. Definieren Sie eine Funktion, welche durch Wertverlaufsrekursion die Fibonacci-Folge (von einem geeigneten Anfangswert an) berechnet.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion primitiv-rekursiv ist:

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ Kodezahl einer Formel ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sie dürfen dabei auf die primitiv-rekursiven Prädikate und Funktionen bis inklusive Seite 12 zurückgreifen.

Aufgabe 6

Sei φ eine Formel mit $FV(\varphi) = \{x\}$. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n folgendes gilt:

$$PA \vdash \forall x < \bar{n} : \varphi(x) \leftrightarrow \bigwedge_{k=0}^{n-1} \varphi(\bar{k})$$

(Wobei hier $\bigwedge_{k=0}^{-1} \varphi(\bar{k}) :\simeq \top$ und $\bigwedge_{k=0}^{n} \varphi(\bar{k}) :\simeq \bigwedge_{k=0}^{n-1} \varphi(\bar{k}) \wedge \varphi(\bar{n})$.)

Aufgabe 7

Zeigen Sie:

Für alle geschlossenen Terme t_1, t_2 gilt: wenn $\mathbb{N} \models t_1 = t_2$, dann $\mathsf{PA} \vdash t_1 = t_2$.

Aufgabe 8

Betrachten Sie den Beweis von Hilfssatz 5.7. Zeigen Sie, dass für jedes Tupel $\langle n_1, ..., n_k \rangle$ natürlicher Zahlen sowohl $PA \vdash \sigma(\bar{r}, \bar{n}_1, ..., \bar{n}_k)$ als auch $PA \vdash \sigma(y, \bar{n}_1, ..., \bar{n}_k) \to y = \bar{r}$ gilt.