In: Logik, Wissenschaftstheorie und Erkenntnistheorie. Akten des 11. Internationalen Wittgenstein Symposiums, 4.-13. August 1986, Kirchberg/Wechsel (Österreich). Hrsg. v. P. Weingartner und G. Schurz. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1987, S. 230–233.
Ausführliche Fassung in Philosophy of Science 56 (1989), 130-157, DOI: 10.1086/289476

# DER STRUKTURALISTISCHE REDUKTIONSBEGRIFF UND REPRÄSENTATIONEN VON THEORIEN

Peter Schroeder-Heister und Frank Schaefer
Universität Konstanz, BRD

In der wissenschaftstheoretischen Literatur werden gegenwärtig mindestens zwei Typen von Reduktionsbegriffen vertreten, abhängig davon, ob man Theorien durch Klassen von Aussagen („statement view") oder durch Klassen von Strukturen charakterisiert („non-statement view", J. Sneed, W. Stegmüller). Nach der zum „statement view" gehörenden Konzeption wird die Reduktion von Theorien als eine Funktion verstanden, die die Formeln der Ausgangstheorie unter Bewahrung ihrer logischen Strukturen in Formeln der Zieltheorie überführt und dabei bestimmte Eigenschaften erhält, vor allem die Eigenschaft, ein Theorem zu sein. Dieser Ansatz geht auf A. Tarskis metamathematischen Begriff der Interpretierbarkeit von Theorien zurück (Tarski 1953) und ist mit W. V. Quines Idee der „proxy functions" verwandt (Quine 1964). Wissenschaftstheoretisch wurde er erstmals genauer untersucht von Eberle (1971). Eine zusammenfassende Diskussion findet sich bei Bonevac (1982).

Innerhalb der strukturalistischen Konzeption versteht man unter „Reduktion" eine Funktion zwischen Mengen von Strukturen mit bestimmten Transformationseigenschaften. Insbesondere sollen Modelle der reduzierenden Theorie in Modelle der reduzierten Theorie überführt werden. Dieser Reduktionsbegriff wurde von Sneed (1971) vorgeschlagen. Ausführliche Diskussionen finden sich bei Mayr (1976, 1981) und Stegmüller (1986, Kap. 4). Für einen konzisen Überblick über alle Varianten des Reduktionsbegriffs mit ausführlichen Literaturhinweisen siehe Carrier (1988).

Ziel dieser Arbeit, die in ausführlicher Fassung in Schroeder-Heister und Schaefer (1987) erscheint, ist zu zeigen, wie weit beide Typen von Reduktionsbegriffen miteinander verwandt sind. Genauer soll ein Äquivalent zum strukturalistischen Reduktionsbegriff im Rahmen des „statement view" skizziert werden. Dieses Äquivalent wird im Anschluß an Eberles (1971) Begriff der „representing function" „Repräsentation" genannt. Der Vergleich mit dem Reduktionsbegriff des „statement view" ergibt interessante Einsichten in das Verhältnis von strukturalistischem Reduktionsbegriff und dem Begriff der Kommensurabilität von Theorien – ein Problem, das in der Diskussion von Pearce (1982) und Balzer (1985) neu aufgeworfen worden ist (vgl. auch Stegmüller 1986, Kap. 10).

Theorien im Sinne des „statement view" sollen im folgenden verstanden werden als Paare $T = \langle L, \Theta \rangle$, wobei L eine Sprache erster Stufe ist und $\Theta$ eine Menge von Aussagen dieser Sprache ($\Theta \subseteq Aus(L)$), die Menge der *Theoreme* von T. Theorien im Sinne des „non-statement view" sollen verstanden werden als Paare $T_m = \langle M_p, M \rangle$, wobei $M_p$ eine Menge von Strukturen ist und M eine Teilmenge von $M_p$, die Menge der *Modelle* von $T_m$. (Der Index ‚m' soll suggerieren, daß es sich um modelltheoretisch charakterisierte Theorien handelt. Weitere Spezifikationen, die mit theoretischen Funktionen zu tun haben, werden weggelassen, da sie für unsere Fragestellung nicht wesentlich sind.)

Reduktionen von Theorien im Sinne des „non-statement view" seien wie folgt definiert, wobei „$\equiv$" die Relation der elementaren Äquivalenz bezeichnet, die zwischen Strukturen genau dann besteht, wenn in ihnen dieselben Aussagen gelten:

Seien Theorien $T_m = \langle M_p, M \rangle$ und $T_m' = \langle M_p', M' \rangle$ gegeben. Eine Relation $R \subseteq M_p' \times M_p$ heißt *schwache Reduktion* von $T_m$ auf $T_m'$, falls

(Red1) $D_{II}(R) = M_p$

(Red2) $(\forall x' \in D_I(R))\,(\forall x, y \in M_p)\,(x'Rx \;\&\; x'Ry \Rightarrow x \equiv y)$

(Red3) $R(M') \subseteq M$.

Falls statt (Red3) sogar

(Red4) $R(M') = M$

gilt, heißt R auch *starke Reduktion.* (Achtung: Unsere Unterscheidung von schwacher und starker Reduktion entspricht nicht der gleichlautenden Terminologie bei Sneed und Stegmüller.)

Zur Definition des Repräsentationsbegriffs im Rahmen des „statement view" benötigen wir den Begriff der partiellen Konsequenz. Falls S eine Menge von Strukturen von L ist ($S \subseteq Str(L)$), dann impliziere die Menge von Aussagen $\Sigma \subseteq Aus(L)$ die Aussage $\sigma \in Aus(L)$, falls alle Strukturen aus S, in denen alle Aussagen aus $\Sigma$ gelten, auch $\sigma$ wahr machen, d.h.

$$\Sigma \models_S \sigma \Leftrightarrow_{df} (\forall x \in S)\,(x \models \Sigma \Rightarrow x \models \sigma).$$

Der Begriff der partiellen logischen Konsequenz ist eine Verallgemeinerung des Bolzano-Tarskischen Begriffs der logischen Konsequenz: Wenn man $S = Str(L)$ setzt, erhält man diesen Begriff als Grenzfall.

Repräsentationen von Theorien im Sinne des „statement view" können wir nun folgendermaßen definieren:

Seien Theorien $T = \langle L, \Theta \rangle$ und $T' = \langle L', \Theta' \rangle$ sowie Mengen von Strukturen $S \subseteq Str(L)$ und $S' \subseteq Str(L')$ gegeben. Eine Funktion $f\colon Aus(L) \rightarrow Aus(L')$ heißt *schwache Repräsentation* von T in T' bezüglich S und S', falls für alle $\Sigma \subseteq Aus(L)$ und $\sigma \in Aus(L)$ gilt:

(Rep1) $\Sigma \models_S \sigma \Rightarrow f(\Sigma) \models_{S'} f(\sigma)$

(Rep2) $f(\neg\sigma) \models_{S'} \neg f(\sigma) \quad \& \quad \neg f(\sigma) \models_{S'} f(\neg\sigma)$

(Rep3) $f(\Theta) \subseteq \Theta'$.

Falls statt (Rep1) sogar

(Rep4) $f(\Sigma) \models_{S'} f(\sigma) \Leftrightarrow \Sigma \models_S \sigma$

und statt (Rep3) sogar

(Rep5) $f(\Theta) = \Theta' \cap D_{II}(f)$

gilt, heißt f *starke Repräsentation* von T in T' bezüglich S und S'.

Sei nun eine beliebige Funktion $f\colon Aus(L) \rightarrow Aus(L')$ gegeben (nicht notwendigerweise eine Repräsentation). Dann ist die *mit f assoziierte Relation* $R_f \subseteq Str(L') \times Str(L)$ für $x' \in Str(L')$, $x \in Str(L)$ definiert durch

$$x' R_f\, x \Leftrightarrow_{df} (\forall \sigma \in Aus(L))\,(x' \models f(\sigma) \Leftrightarrow x \models \sigma).$$

Falls $\equiv_f$ die elementare Äquivalenz bzgl. f bezeichnet, die für $x', y' \in Str(L')$ definiert ist durch

$$x' \equiv_f y' \Leftrightarrow_{df} (\forall \sigma \in Aus(L))\,(x' \models f(\sigma) \Leftrightarrow y' \models f(\sigma)),$$

dann ist $R_f$ linkseindeutig modulo $\equiv_f$ und rechtseindeutig modulo $\equiv$. Durch Übergang zu Äquivalenzklassen bzgl. $\equiv_f$ und $\equiv$ als linken bzw. rechten Argumenten würde $R_f$ also zu einer partiellen, injektiven Funktion $Str(L') \rightarrow Str(L)$ werden.

Die Beziehung zwischen Reduktionen und Repräsentationen wird durch die folgenden beiden Theoreme hergestellt. Für eine Aussagenmenge $\Sigma$ soll dabei $Mod(\Sigma)$ die Menge der Strukturen sein, in denen alle Aussagen aus $\Sigma$ gelten. Umgekehrt soll $Th(M)$ für eine Menge von Strukturen M die Menge der Aussagen sein, die in allen Strukturen aus M gelten. $S_{\equiv}$ soll der Abschluß von S unter $\equiv$ und $S'_{\equiv f}$ der Abschluß von S' unter $\equiv_f$ sein.

*Theorem 1 (Überführung von Repräsentationen in Reduktionen).*

(i) Sei $f\colon Aus(L) \rightarrow Aus(L')$ schwache Repräsentation von $T = \langle L,\Theta \rangle$ in $T' = \langle L',\Theta' \rangle$ bzgl. S und S'. Seien $T_m = \langle M_p, M \rangle$ und $T_m' = \langle M_p', M' \rangle$ wie folgt definiert:

$M_p = R_f(S')$ $\quad\quad$ $M_p' \supseteq S'$
$M = Mod(\Theta) \cap M_p$ $\quad\quad$ $M' = Mod(\Theta' \cap D_{II}(f)) \cap M_p'$.
Sei $R \subseteq M_p' xM_p$ definiert durch $R = R_f \cap (S' xM_p)$.
Dann ist R schwache Reduktion von $T_m$ auf $T_m'$.

(ii) Sei f starke Repräsentation von T in T' bzgl. S und S'.
Seien $T_m$ und $T_m'$ definiert durch:
$M_p = S_{\equiv}$ $\quad\quad$ $M_p' \supseteq S'_{\equiv f}$
M und M' wie unter (i).
Sei R definiert durch $R = R_f \cap (S'_{\equiv f} xM_p)$.
Dann ist R starke Reduktion vom $T_m$ auf $T_m'$.

*Theorem 2 (Überführung von Reduktionen in Repräsentationen).*

(i) Sei $R \subseteq M_p' xM_p$ schwache Reduktion von $T_m = <M_p,M>$ auf $T_m' = <M_p',M'>$. Seien $T = <L,\Theta>$ und $T' = <L',\Theta'>$ wie folgt definiert:
L und L' seien diejenigen Sprachen erster Stufe, die durch die Ähnlichkeitstypen von $M_p$ bzw. $M_p'$ charakterisiert sind.
Sei ferner
$\Theta = Th(M)$ $\quad\quad$ $\Theta' = Th(M' \cap D_I(R))$.
Falls dann R projektiv definierbar, gibt es eine schwache Repräsentation f von T in T' bzgl. $S \supseteq M_p$ und $S' \subseteq D_I(R)$.

(ii) Falls R starke Reduktion von $T_m$ auf $T_m'$, ist f starke Repräsentation von T in T' bzgl. $S = M_p$ und $S' = D_I(R)$.

Der Beweis von Theorem 2 benutzt wesentlich ein Theorem von S. Feferman, auf dessen Relevanz für die Wissenschaftstheorie erstmals Pearce (1982) hingewiesen hat.

Die beiden Theoreme zeigen, daß unter gewissen Bedingungen, die in vielen Fällen erfüllt sind, Reduktionen im strukturalistischen Sinne und Repräsentationen im Sinne des „statement view" ineinander überführbar sind, d.h. daß der Begriff der Repräsentation ein Äquivalent zum strukturalistischen Reduktionsbegriff auf der Ebene des „statement view" darstellt. Das heißt jedoch nicht, daß damit auch Reduktionen im strukturalistischen Sinne und Reduktionen im Sinne des „statement view" äquivalent sind. Der Begriff der Repräsentation ist nämlich wesentlich allgemeiner als der Begriff der Reduktion im „statement" Sinn. Selbst wenn man davon absieht, daß er partielle Konsequenz benutzt und nicht nur logische Konsequenz, bleibt die Tatsache, daß er nur Funktionen von *Aussagen*mengen in *Aussagen*mengen betrachtet, und nicht, wie alle Versionen des Reduktionsbegriffs, wie sie etwa in Eberle (1971) oder Bonevac (1982) diskutiert werden, Funktionen von *Formel*mengen in *Formel*mengen. Das bedeutet insbesondere, daß bei Repräsentationen nichts darüber verlangt wird, wie quantifizierte Aussagen transformiert werden. Erweitert man den Repräsentationsbegriff derart, daß auch solche Bedingungen erfüllt sein müssen, dann läßt sich Theorem 2 nicht mehr beweisen.

Der Nachweis von Repräsentationen als Äquivalenten des strukturalistischen Reduktionsbegriffs zeigt also, daß dieser Begriff wesentlich allgemeiner ist als die im Rahmen des „statement view" diskutierten Reduktionsbegriffe. Dies macht die Stegmüllersche These, daß Theorien aufeinander reduzierbar sein können, ohne im Kuhnschen Sinne miteinander kommensurabel zu sein, wesentlich plausibler als sie prima facie scheinen mag. Reduzierbarkeit im Sinne des „statement view" ist in der Tat ein Begriff, der intuitiv sehr eng mit dem Kommensurabilitätsbegriff verknüpft ist, da seine Grundidee die der Übersetzung von *Formeln* und damit wissenschaftlichen *Begriffen* ist. Repräsentationen bauen dagegen auf der Idee der Übersetzung von *Aussagen*, d.h. wissenschaftlichen *Sätzen* ungeachtet der internen Struktur von atomaren und quantifizierten Aussagen auf. Theorien mögen auf der begrifflichen Ebene nicht mehr vergleichbar (kommensurabel) sein; damit ist ihre Vergleichbarkeit auf der Aussagenebene, und so ein – wenn auch schwächeres – Kriterium für den wissenschaftlichen Fortschritt, nicht ausgeschlossen.

---

## LITERATUR


Balzer, W., „Incommensurability, Reduction, and Translation“, *Erkenntnis* Bd. 23 (1985), S. 255–267.

Bonevac, D. A., *Reduction in the Abstract Sciences* (Indianapolis/Cambridge 1982).

Carrier, M., „Reduktion“, in: J. Mittelstraß (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* Bd. III (Mannheim/Wien/Zürich 1988).

Eberle, R. A., „Replacing one Theory by another under Preservation of a given Feature“, *Philosophy of Science* Bd. 38 (1971), S. 486–501.

Mayr, D., „Investigations of the Concept of Reduction“, *Erkenntnis* Bd. 10 (1976), S. 275–294 und Bd. 16 (1981), S. 109–129.

Pearce, D., „Stegmüller on Kuhn and Incommensurability“, *British Journal for the Philosophy of Science* Bd. 33 (1982), S. 389–396.

Quine, W. V., „Ontological Reduction and the World of Numbers“, *Journal of Philosophy* Bd. 61 (1964), S. 209–216.

Schroeder-Heister, P. und Schaefer, F., „Reduction, Representation and Commensurability of Theories“, *Philosophy of Science* (im Druck).

Sneed, J. D., *The Logical Structure of Mathematical Physics* (Dordrecht 1971, ²1979).

Stegmüller, W., *Theorie und Erfahrung*. Dritter Teilband: *Die Entwicklung des neuen Strukturalismus seit 1973*. (Berlin/Heidelberg/New York 1986).

Tarski, A., „A General Method in Proofs of Undecidability“, in: A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson, *Undecidable Theories* (Amsterdam 1953), S. 1–35.


* * *