CAPITOLO 3
LE LEGGI DELL'ARMONIA

3.1. La giustificazione delle leggi logiche

3.1.1. IL PROBLEMA DELLA GIUSTIFICAZIONE

La costruzione di una semantica logica è usualmente intesa come la definizione di un insieme unitario di principi che giustifichino le leggi derivabili in un certo calcolo o sistema logico. A questo scopo, la dimostrazione di un teorema di validità e completezza risulta essenziale: la validità mostra che tutte le leggi del sistema sono giustificate dalle definizioni semantiche, ossia sono logicamente vere; la completezza mostra invece che le definizioni semantiche non attribuiscono lo status di verità logica ad enunciati non derivabili nel calcolo, o in altri termini, che il calcolo cattura completamente le verità logiche. Tuttavia l'equivalenza estensionale così stabilita tra le definizioni semantiche e quelle sintattiche, e dunque, assunta la priorità delle definizioni semantiche, la giustificazione delle leggi del calcolo logico, riposa sull'assunzione della validità delle leggi logiche a livello metateorico, di quelle stesse leggi, cioè, che ci si era proposti di giustificare. Né sembra esserci modo di uscire da questa forma di circolarità. Dummett non pensa che la circolarità sia catastrofica per la rilevanza concettuale dei teoremi di validità e completezza, qualora il nostro scopo sia quello di spiegare il funzionamento della pratica deduttiva mediante il ricorso a nozioni semantiche, e non di convincere qualcuno della validità di certe leggi[1] nel caso in cui questi ne dubiti (cfr. (1973a), 310-311).

Egli ritiene tuttavia che il problema della giustificazione si ponga anche ad un livello più profondo e fondamentale, ossia quello di *spiegare come la deduzione sia possibile*. A questo livello, la questione diventa anzitutto quella di dar conto, da un lato, della *legittimità* della deduzione, e dall'altro della sua *informatività*, nel senso che per mezzo di essa giungiamo ad acquisire nuova conoscenza. I due aspetti, nota Dummett, sembrano essere in reciproca tensione: perché la deduzione sia legittima, il processo che conduce a riconoscere la verità delle premesse deve aver già compiuto ciò che è necessario

(1)
E' bene precisare che la nozione di legge logica che è qui in questione è quella di principio di inferenza, facente riferimento alla sola struttura logica delle premesse e della conclusione, che permentte di derivare verità non logiche da altre verità non logiche (cfr. p. es. Dummett (1991), 184). Ciò è in accordo con l'idea, già rilevata in precedenza, secondo cui la logica ha a che fare non con un insieme di proposizioni banali, ma con la struttura della deduzione.

1

per riconoscere la verità della conclusione; perché sia informativa, d'altra parte, l'aver riconosciuto la verità delle premesse non deve comportare l'avvenuto riconoscimento della verità della conclusione (ibid., 297). Il problema si pone essenzialmente per la presenza di metodi indiretti di prova: se il significato di un certo enunciato consiste nelle condizioni dirette della sua asseribilità — il cui carattere rimane ancora da specificare —, allora non c'è nulla di problematico nel fatto che un certo enunciato asserito mediante l'impiego di inferenze dirette sia valido, perché la comprensione dell'enunciato è tutt'uno con il riconoscimento della validità di tali inferenze; il problema della legittimità sorge quando si fa uso di inferenze indirette, ossia quando la comprensione dei processi inferenziali non è immediatamente connessa alla comprensione dell'enunciato stesso: in che senso si può dire, in questo caso, che le inferenze sono rimaste “fedeli" al significato originario dell'enunciato? Come si vede, ciò risolleva il problema del rapporto tra metodi inferenziali diretti e indiretti, e della possibilità di trasformare una dimostrazione in una prova diretta. Se si riesce a dare un modello plausibile di questa possibilità, il problema centrale della giustificazione della deduzione è per Dummett risolto, poiché la trasformabilità è proprio quanto garantisce che i significati delle varie modalità inferenziali siano connessi da un rapporto di dipendenza, e che quindi i metodi indiretti non costituiscano una deviazione rispetto ai significati stabiliti mediante i soli metodi diretti. La questione dell'informatività della deduzione si propone in maniera analoga. Supponiamo di avere due argomenti $<\Gamma, \alpha>$ e $<\Delta, \beta>$, tali che α sia ottenuta da Γ per mezzo di inferenze dirette, e che β sia ottenuta da Δ facendo uso di inferenze indirette. Perché essi siano validi, ogni passo deve comportare il riconoscimento della verità; perché siano epistemicamente utili, il riconoscimento della verità delle premesse non deve comportare l'effettivo riconoscimento della verità delle rispettive conclusioni. Supponiamo che entrambe le condizioni siano soddisfatte: nel primo caso, la proprietà che si mantiene nella deduzione, ossia la verità, può essere identificata con il possesso di una dimostrazione diretta, ma ciò non può valere nel secondo caso, perché per ipotesi abbiamo una deduzione legittima e informativa ma che non produce una giustificazione diretta di β: dobbiamo concludere che β è vera indipendentemente dall'averla riconosciuta come tale con mezzi diretti. Ciò vuol dire che l'esigenza di rendere conto dell'informatività della deduzione induce Dummett ad ammettere una certa distanza tra verità e riconoscimento della verità con mezzi diretti, e a rifiutare quindi una posizione strettamente idealistica (cfr. (1973a), 313-314).

Inoltre, una giustificazione della deduzione deve anche affrontare il problema di come sia possibile dirimere le dispute concernenti leggi logiche controverse. Anche in questo caso, la questione si pone in termini di significato: se due persone non concordano sull'accettazione di una certa legge, ma entrambe assumono una posizione egualmente legittima, allora esse attribuiscono differenti significati alle costanti logiche. Questo disaccordo non è banale, perché in genere una delle due parti non riconosce all'altra alcuna attribuzione di significato intelligibile. L'indagine sulla validità delle leggi logiche deve allora concentrarsi anzitutto sul modo in cui i significati delle costanti logiche *ci sono dati* ((1991), 192). A questo proposito, osserva Dummett, ci troviamo di fronte a due alternative (ibid., 194):

(1) I significati degli enunciati assertori in generale, e delle costanti logiche in particolare, sono dati *prima*, in modo tale che le forme inferenziali sono valide solo se si può mostrare che sono fedeli ad essi. Ciò esclude che le leggi logiche ritenute valide possano *modificare* i significati delle costanti logiche, e garantisce la possibilità stessa di una giustificazione della deduzione.

(2) Le leggi logiche *determinano* il significato delle costanti logiche, non essendovi qualcosa come dei significati precedentemente dati ai quali la nostra pratica inferenziale debba conformarsi. Poiché non c'è alcun termine di confronto, la scelta delle leggi logiche è del tutto arbitraria, e quindi lo è anche il significato delle costanti logiche: “We have the right to make them mean what we like; and therefore we have the right to adopt what logical laws we choose. The question of any justification of these laws accordingly does not arise: logical laws are *self-justifying*, that is to say, justified simply by being the logical laws we *treat* as valid" (ibid., 204).

Di fatto, questa contrapposizione coincide con quella tra teoria molecolaristica e teoria olistica del significato: mentre il molecolarista considera i significati come individuabili in unità specifiche, per cui ha senso chiedersi se una certa regola risulta in qualche modo fedele ai significati già fissati, l'olista rifiuta una simile idea, perché pensa che il significato di una certa espressione dipenda dalla totalità dei significati delle espressioni presenti nel linguaggio. Espresso nella terminologia dummettiana, ciò significa che per comprendere un enunciato si deve comprendere l'intero linguaggio. Pertanto, nella prospettiva dell'olismo nessuna regola può essere giustificata da un'altra regola, se non nel senso banale che tale giustificazione è parte della pratica linguistica stessa, ossia, in definitiva, è ancora una regola. Un'altra conseguenza immediata è che introdurre nuove regole nel linguaggio comporta che ciò che si viene a costituire sia non il linguaggio originario in forma estesa, ma un *nuovo* linguaggio: il motivo di ciò è che se il significato di un'espressione dipende dalla totalità delle interrelazioni semantiche nel linguaggio, allora introdurre una nuova regola *modifica* — come caso limite — l'intera rete di connessioni, e quindi i significati del linguaggio originario[2]. Dal punto di vista dell'olismo, la deduzione è al contempo legittima e informativa: legittima, semplicemente perché essa è parte della pratica linguistica; e informativa, perché per suo mezzo possiamo giungere a delle conclusioni che non potremmo ottenere altrimenti.

Nel primo capitolo abbiamo già visto che la teoria del significato quale concepita da Dummett è molecolaristica, e che quindi la sua opzione va sicuramente alla prospettiva (1). In effetti, tale opzione

(2)
Come è noto, si danno differenti versioni dell'olismo; per i nostri scopi, tuttavia, è sufficiente attenersi all'accezione sopra riportata.

teorica si rivela essenziale alla sua teoria, caratterizzata in senso fortemente epistemico. La concezione costruttivista del significato deve sostenere la falsità dell'olismo per una necessità intrinseca, ossia perché se il significato di un enunciato è dato in termini delle condizioni per la sua asseribilità, e se si reputa rilevante il fatto che vi sia un soggetto conoscente che compie certe operazioni cognitive volte a stabilire la verità dell'enunciato, allora non si può ammettere che queste operazioni ricevano senso soltanto in virtù della totalità delle operazioni che sono consentite in un certo sistema di regole. Un'operazione deve avere senso individualmente (o meglio, localmente), se deve essere eseguibile; l'olismo implica invece che ogni operazione debba far riferimento ad una totalità non cognitivamente dominabile (unsurveyable): "Our grasp of the content of a sentence must be capable of being represented in isolation, as it were, from the rest of the language; otherwise we should have no command over what it was that the sentence said, since the multiplicity of ways in which the condition for the correctness of an assertion made by it could in no way be *surveyed*. That is not to claim that an understanding of any sentence could exist on its own, without a knowledge of any of the rest of the language: every sentence is composed of words or signs which could not be understood unless it were known how to use them in at least some other sentences. The understanding of any given sentence will depend upon the mastery of some fragment of the language, more or less extensive according to the complexity or depth of the sentence. But it is essential to this view that sentences can be *ranked in a hierarchy, according to their complexity*" (Dummett (1977), 367-368; corsivi nostri).

L'attacco di Dummett all'olismo (limitandoci qui alle costanti logiche) è diretto, da un lato, contro l'idea che per ogni scelta arbitraria di leggi logiche sia possibile desumere da esse il significato degli operatori logici coinvolti, e dall'altro, contro l'assunzione che un linguaggio debba essere sempre "in ordine", comunque esso sia fatto. Entrambe le idee furono, secondo Dummett, strenuamente difese da Wittgenstein. L'idea che desumere i significati delle costanti logiche da qualsiasi sistema di leggi sia cosa non problematica è solidale con l'identificazione della comprensione dei significati con il possesso di una capacità pratica, cosa che esclude che in questo caso sia in gioco una forma di *conoscenza* in senso stretto. Abbiamo già avuto modo di notare che per Dummett ciò non può essere corretto, perché "our grasp of the contents of the sentences of the language [...] could not exist [...] as a mastery of a purely external practice. By the very nature of the language, we could not learn its use as a means of interacting with others without simultaneously learning to use it as a vehicle for our own thoughts" ((1991), 103). Nel nostro caso specifico, se introducessimo delle leggi scelte arbitrariamente, sarebbe ancora possibile adeguare ad esse la nostra pratica, ma non capiremmo più il senso di ciò che staremmo facendo: la nostra pratica inferenziale risulterebbe priva di significato perspicuo, essendo venuto meno l'indispensabile correlato epistemico del significato (ibid., 207-209). Dummett chiama "formalismo logico" la tesi secondo cui ogni insieme arbitrario di leggi logiche sarebbe autogiustificante, perché condivide con il formalismo matematico l'idea che tutto ciò che conta è la manipolazione dei simboli.

La seconda idea del formalismo logico è che qualsiasi sistema di leggi si voglia adottare, esso risulterà privo di difetti. E poiché è chiaramente possibile che i principi che governano l'uso di un dato linguaggio ingenerino delle contraddizioni, il formalista logico dovrà concludere che l'inconsistenza non è un difetto. Per Dummett, al contrario, esiste sempre la possibilità che si diano dei difetti nel linguaggio — la possibilità, cioè, che esso raggiunga i suoi fini solo imperfettamente —, e ciò per la molteplicità dei principi che governano il suo uso, principi che possono talvolta entrare in conflitto. L'inconsistenza è il più grave caso di conflitto tra i vari aspetti della pratica linguistica. Né vale obiettare che il linguaggio non ha alcun fine, perché ogni fine è fissato all'interno della pratica linguistica stessa: per Dummett chi possiede un linguaggio *apprende* quali sono i suoi fini, e può adeguare ad essi la pratica, qualora questa sia difettosa (cfr. (1991), 210). Come abbiamo già accennato (cfr. cap. 1.), secondo Dummett i principi che governano la pratica linguistica sono sussumibili sotto due grandi categorie: condizioni che giustificano l'asseribilità degli enunciati, e principi che determinano le conseguenze di asserzioni possibili. Dato un enunciato, questi principi rispondono alle domande: “quando dovrei usarlo?", e “cosa posso fare con esso?": si tratta dunque, rispettivamente, dei punti di vista verificazionista e pragmatista in teoria del significato. Ma indipendentemente da quale sia l'approccio privilegiato per l'edificazione di una teoria del significato, è un fatto, per Dummett, che la pratica linguistica presenti entrambi gli aspetti. Ora, è essenziale che questi principi siano in reciproca *armonia*, ovvero che essi non possano essere determinati indipendentemente l'uno dall'altro: date le condizioni di asseribilità di un enunciato, le conseguenze della sua accettazione non possono essere arbitrarie; e dati i principi che determinano le sue conseguenze, non può essere fissato arbitrariamente ciò che serve ad assumerlo per vero. Richiedere l'armonia significa allora (in una prospettiva verificazionista) che *le condizioni di asseribilità devono garantire la validità dei principi che determinano le conseguenze degli enunciati asseriti*. Quest'esigenza si mostra chiaramente proprio nel caso dell'inferenza deduttiva: “An argument or proof convinces us because we construe it as showing that, given that the premisses hold good according to our ordinary criteria, the conclusion also hold *according to the criteria we already have for its holding*" ((1991), 219).

La nozione di armonia si presenta allora al contempo come una condizione antiolistica e come il quadro concettuale entro il quale affrontare il problema della giustificazione delle leggi logiche. Questo quadro concettuale è nelle linee generali lo stesso che viene assunto da Prawitz nel suo progetto di definire una nozione *assoluta* di dimostrabilità, e di giungere per mezzo di essa ad una semantica non modellistica la cui definizione di conseguenza logica soddisfi i requisiti posti nel capitolo precedente, anche se, come vedremo presto, la posizione di Prawitz differisce in maniera essenziale da quella di Dummett. Caratteri essenziali di questo progetto congiunto sono (1) l'esigenza di definire in maniera precisa le nozioni di dimostrazione e di prova canonica, e il loro rapporto; e (2) la necessità di invalidare le leggi logiche classiche. La precisazione della nozione di armonia passa attraverso l'esame di due questioni fondamentali: il problema sollevato da Prior (1960), con la risposta di Belnap (1962), e la dimostrazione del teorema di normalizzazione da parte di Prawitz (1965).

3.1.2. L'OPERATORE "TONK"

In un suo celebre articolo (1960), A. Prior attaccò la nozione di inferenza *analiticamente valida*, ossia caratterizzata dalle seguenti condizioni:
(i) la sua validità sorge *unicamente* dai significati di certe espressioni che vi occorrono;
(ii) tali significati sono *completamente* specificati mediante regole di inferenza, e ogniqualvolta definiamo delle regole fissiamo esaustivamente un significato.
Consideriamo per esempio la congiunzione: secondo la teoria della validità analitica è sufficiente specificare delle regole (o "definizioni inferenziali"), quali ad esempio (impiegando una notazione lineare secondo certi usi di Schroeder-Heister (1984))

$$<\alpha, \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta$$

$$<\alpha \wedge \beta> \Rightarrow \alpha$$

$$<\alpha \wedge \beta> \Rightarrow \beta$$

per fornire in maniera esaustiva il significato dell'operatore " $\wedge$ ", e qualsiasi inferenza che sia un caso di queste regole schematiche sarà valida in virtù del significato fissato. E' chiaro che la condizione (ii) coincide con la tesi olistica del formalismo logico criticata da Dummett: da ogni sistema di regole è possibile desumere i significati degli operatori logici, e dunque ogni sistema è perfettamente "in ordine"; più delicato è invece lo status della condizione (i). Ora, l'obiezione di Prior è che se si ammette che sia sufficiente dare delle regole per definire in maniera completa il significato, allora è legittimo definire delle regole tali che qualsiasi enunciato del linguaggio possa essere inferito, e quindi tutti gli enunciati siano equivalenti. Consideriamo infatti un nuovo operatore "tonk", definito dalle seguenti regole:

I-regole:	$<\alpha> \Rightarrow \alpha \text{ tonk } \beta$	$<\beta> \Rightarrow \alpha \text{ tonk } \beta$
E-regole:	$<\alpha \text{ tonk } \beta> \Rightarrow \alpha$	$<\alpha \text{ tonk } \beta> \Rightarrow \beta$

La presenza di un simile operatore rende il nostro sistema inconsistente. Sia $\alpha \equiv$ "2+2=4", e $\beta \equiv$ "2+2=5". Da ciò ricaviamo immediatamente una contraddizione:

$$<<<\alpha_{(1)}> \Rightarrow \alpha \text{ tonk } \beta> \Rightarrow \beta> \Rightarrow {}_{(1)}\alpha \rightarrow \beta$$

(dove i pedici indicano le formule scaricate in corrispondenza di certe inferenze). La teoria della validità analitica è dunque insostenibile, perché ammette come valide forme inferenziali che consentono di dimostrare l'equivalenza di tutte le formule del linguaggio, e che quindi conducono all'assurdo.

Sgombriamo anzitutto il campo da una possibile obiezione (cfr. Stevenson (1961)). Secondo questa obiezione, la teoria della validità analitica è stata semplicemente mal formulata, ad è soltanto in virtù di questo fraintendimento che risulta possibile giungere al nostro risultato paradossale. Più precisamente, la condizione (ii) non può essere formulata in termini di regole inferenziali *permissive*, perché in questo modo non si assicura che la regola schematica sia valida, ossia che ogni esempio della regola faccia ottenere conseguenze vere quando le premesse sono vere. Una giustificazione *completa* delle regole inferenziali si ottiene soltanto qualora si stabilisca a livello metalinguistico in che modo il valore di verità dell'enunciato costruito mediante l'operatore proposizionale in questione è funzione dei valori di verità degli enunciati componenti, perché soltanto in questo modo è possibile dimostrare la validità della regola. Pertanto la teoria della validità analitica sarebbe esente dall'obiezione di Prior, poiché l'operatore "tonk" non ha delle regole che possano essere dimostrate valide nel metalinguaggio, non essendoci una tavola di verità che gli attribuisca proprietà sintattiche non contraddittorie. Sembra chiaro che questa obiezione non colpisce affatto la forza dell'argomento di Prior, visto che le tavole di verità sono a loro volta delle regole che si suppone fissino il significato degli operatori logici enunciativi, ossia sono regole nello stesso senso delle regole di inferenza che dovrebbero giustificare. Dunque non c'è alcuna differenza di principio fra tavole di verità e regole inferenziali (cfr. Prior (1964), 192).

Un'ulteriore obiezione (cfr. Wagner (1981)) contesta la legittimità stessa della specificazione, nel caratterizzare la teoria della validità analitica, del punto (ii), ossia di come i significati sono dati: quello che la teoria afferma sarebbe che la validità di un'inferenza dipende interamente dai significati di certe espressioni coinvolte. Pertanto, dall'argomento di Prior non seguirebbe il risultato voluto, perché tutto ciò che esso dimostra è che non tutte le definizioni inferenziali possono determinare (o quantomeno essere parte di) un significato, e la teoria della validità analitica non sostiene il contrario, venendo meno il punto (ii). Questa obiezione rischia di trasformarsi in una mera questione terminologica, visto che dipende da cosa si voglia intendere per teoria della validità analitica. Tuttavia pone l'accento sul fatto che il reale bersaglio di Prior è proprio il punto (ii) della definizione; non è chiaro in che senso sia da rigettare anche (i), se non in quanto fa uso di una nozione di significato specificata da (ii).

La conclusione di Prior in ogni caso è che fissare delle regole garantisce un solo risultato certo, ossia la mera definizione di un gioco di simboli. Stabilendo delle regole si definisce, per esempio, il segno di formazione della congiunzione, ma non il significato di “e". Qualora invece la specificazione di regole sia intesa ad avere un effetto sostanziale, la sua utilità sta tutta nel suo valore pedagogico, ossia nel metterci sulla giusta strada nella comprensione del senso delle espressioni in questione. Ma è chiaro che sotto questo aspetto il metodo è tutt'altro che infallibile, perché, come nel caso di “tonk", ci sono regole che non si applicano a nulla, a cui non corrisponde alcun significato intelligibile. Credere che sia suffficiente dare delle regole per definire il significato, equivale semplicemente a confondere un linguaggio significante con un gioco di simboli in cui non è coinvolta alcuna trasmissione di informazione. Possiamo riassumere questa posizione nella seguente

TESI DI PRIOR. Non esiste un sistema logico governato da regole deduttive S=<$\mathcal{L}, D$> tale che un certo operatore $\mathbb{C}$ appartenente a $\mathcal{L}$ tragga il suo significato soltanto dal sottoinsieme di D che governa il comportamento di $\mathbb{C}$. Il “ruolo funzionale" di $\mathbb{C}$ non ne costituisce il significato.

COROLLARIO. I significati delle costanti logiche sono dati *prima* delle regole deduttive: ciò vuol dire che “an expression must have some independently determined meaning before we can discover whether inferences involving it are valid or invalid" (Prior (1960), 38).

In positivo, tuttavia, Prior ha dato pochissime indicazioni, in particolare riguardo alla questione di come debbano essere intesi i significati dati indipendentemente dalle regole[3]. Come si vede, le obiezioni di Dummett al formalismo logico discendono essenzialmente dall'attacco mosso da Prior alla teoria della validità analitica. Vedremo ora che la sua nozione di armonia è sostanzialmente mutuata dalla soluzione di Belnap.

3.1.3. ESTENSIONI CONSERVATIVE

Nella sua risposta a Prior, N. Belnap (1962) ha inteso risolvere la questione imponendo delle restrizioni sul sistema che si viene a creare introducendo un nuovo operatore, sulla base dell'idea che l'aggiunzione di nuove unità linguistico-deduttive avviene sempre in un *contesto di deducibilità precedentemente dato*: in effetti, nota Belnap, senza avere la transitività della deduzione di deducibilità, Prior non avrebbe potuto ricavare il suo risultato. Quello che in generale dobbiamo richiedere è che l'estensione sia *consistente* con le assunzioni fatte in precedenza. A garantire la consistenza, Belnap suggerisce di imporre la condizione di *estensione conservativa*: dato un sistema formale S formulato in un linguaggio $\mathcal{L}$, e data un'estensione S_φ di S ottenuta mediante l'aggiunta di un nuovo operatore φ e delle relative regole deduttive, S_φ è un'estensione conservativa di S sse per ogni formula $\alpha \in \mathcal{L}$, se $S_\varphi \vdash \alpha$, allora $S \vdash \alpha$. In questo modo abbiamo la certezza che il nuovo sistema S_φ è consistente, se lo è già S. Porre la condizione di consistenza in termini di estensione conservativa, sottolinea Belnap, equivale ad assumere che, una volta determinata una certa relazione di deducibilità $\underset{S}{\vdash}$, abbiamo con

(3)
Wagner (1981) sostiene che il significato sia per Prior assimilabile al Sinn di Frege, cioè sia un'entità astratta che apprendiamo mediante atti quasi-percettivi, e che noi attribuiamo ad una parola decidendo di usarla secondo tale senso precedentemente identificato.

3

ciò fissato *completamente* il contesto di deducibilità, per cui questa relazione deve rimanere invariata comunque si estenda il sistema. Da questo punto di vista, l'operatore di Prior non può essere ammesso, perché esso viola la condizione di conservatività: nel sistema esteso, abbiamo $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, per α e β arbitrarie appartenenti al linguaggio di base, mentre ciò non valeva, per ipotesi, nel sistema di partenza.

Accanto alla conservatività, Belnap introduce una seconda condizione: se vogliamo che le nostre regole deduttive determinino al massimo *un* ruolo inferenziale, non deve accadere che due operatori aventi la stessa caratterizzazione formale possano avere ruoli inferenziali diversi, e dunque dobbiamo richiedere che sia soddisfatto il requisito dell'*unicità*: l'operatore φ è unico in S_φ sse estendendo il sistema mediante un operatore φ^* governato dalle stesse regole di φ otteniamo un nuovo sistema $S_{\varphi\varphi^*}$ tale che per ogni formula α del linguaggio esteso, $S_{\varphi\varphi^*} \vdash \alpha(\varphi) \leftrightarrow \alpha(\varphi^*)$. La conservatività garantisce l'*esistenza* di un certo operatore, mentre l'unicità ci permette di parlare *dell*'operatore — e non semplicemente di *un* operatore — che soddisfa determinate condizioni. Secondo Belnap il ruolo deduttivo permette dunque di caratterizzare i significati degli operatori logici, benché debbano essere imposte certe restrizioni. Ciò è espresso dalla

TESI DI BELNAP. Il significato di un operatore $\mathbb{C}$ è determinato interamente dal ruolo deduttivo in un dato sistema, purché tale sistema soddisfi le condizioni di estensione conservativa e di unicità.

COROLLARIO. Non è necessario avere un'idea antecedente del significato indipendente dell'operatore.

L'impiego da parte di Dummett dei concetti introdotti da Belnap può essere visto come una risposta alla domanda di Hart (1982) : “what would meaning have to be in order that the conservative extension condition should guarantee the existence of a meaning for a connective?". Sostanzialmente, la risposta è che (1) fissati certi significati, questi significati sono *stabili*, ossia determinati in maniera completa e definitiva dalle regole, e (2) ogni nuova fissazione di significati deve essere fedele ai significati già dati, nel senso che non devono intervenire delle modificazioni di essi. Se interpretiamo i diversi aspetti dell'uso di un linguaggio come originanti dei frammenti del linguaggio stesso, allora possiamo vedere la condizione di armonia come una restrizione sulle possibili costruzioni di linguaggi: ogni estensione di un linguaggio dato deve essere in armonia con esso. In questo modo si delinea un'immediata affinità fra le nozioni di armonia e di conservatività, affinità che Dummett ha sfruttato in una maniera particolare giungendo ad *identificare* le due nozioni. L'argomento di Dummett teso a mostrare la connessione tra armonia ed estensione conservativa è il seguente (cfr. (1991), 218). Supponiamo di essere in una situazione di disarmonia, cioè di poter trarre delle conseguenze da enunciati precedentemente asseriti secondo principi non garantiti dalle condizioni di asseribilità di tali enunciati. Per esempio, sia β una conseguenza di α (dove α contiene l'espressione $\mathbb{E}$) che non è garantita dalle condizioni per asserire α. Sia inoltre $\mathcal{L}$ il linguaggio in cui sono esprimibili α e β; e sia

$\mathcal{L}^*$ il sottolinguaggio ottenuto a partire da $\mathcal{L}$ eliminando l'espressione $\mathbb{E}$ (ciò vuol dire che α non è esprimibile in $\mathcal{L}^*$). Da ciò si ricavano due conseguenze immediate. In primo luogo, $\mathbb{E}$ non è contenuta in β, perché se lo fosse, β sarebbe asseribile mediante una delle condizioni per asserire enunciati contenenti $\mathbb{E}$. Dunque β è esprimibile nel solo $\mathcal{L}^*$. In secondo luogo, poiché β non è garantita dalle condizioni per asserire α, non avremmo potuto ottenerla senza l'introduzione di α, ossia senza il passaggio attraverso α. E poiché α contiene $\mathbb{E}$, le regole che governano $\mathbb{E}$ sono essenziali per ottenere β. Dunque, β non è asseribile in $\mathcal{L}^*$. Le due conseguenze affermano congiuntamente che β è esprimibile in $\mathcal{L}^*$ ma è asseribile in $\mathcal{L}$ soltanto; ciò vuol dire che $\mathcal{L}$ non è un'estensione conservativa di $\mathcal{L}^*$. Per contrapposizione, abbiamo che la conservatività è una condizione sufficiente per l'armonia: "there is harmony between two aspects of the use of a given expression if *the language as a whole* is [...] a conservative extension of what remains of the language when that expression is subtracted from it" (Dummett (1991), 219; corsivi nostri). Impiegando la stessa modalità argomentativa, potremmo anche concludere che in una situazione in cui non vale la conservatività viene meno l'armonia. Supponiamo che la formula β non sia asseribile in $\mathcal{L}^*$, ma lo diventi nell'estensione $\mathcal{L}$, e supponiamo che α sia asseribile in $\mathcal{L}$ a partire dalle condizioni Δ ($\Delta \in \mathcal{L}^*$), e che β sia una conseguenza (sempre in $\mathcal{L}$) di α. Dunque, in $\mathcal{L}$ β è asseribile a partire dalle condizioni Δ, grazie all'introduzione di α, ma ciò non accade in $\mathcal{L}^*$, perché per ipotesi β non è asseribile. Ciò vuol dire che la conservatività è anche una condizione necessaria per l'armonia.

PRINCIPIO DUMMETTIANO DI ARMONIA. Le condizioni di asseribilità di un qualunque enunciato α ($\alpha \in \mathcal{L}$, dove $\mathcal{L}$ è il *linguaggio totale*) garantiscono la validità delle conseguenze di α sse $\mathcal{L}$ è un'estensione conservativa rispetto a tutti i suoi sottolinguaggi.

La condizione dell'armonia asserisce quindi che un linguaggio in cui accade che con l'introduzione di una nuova espressione (e le sue regole d'uso) si istituiscano *nuovi criteri* per asserire enunciati esprimibili ma non asseribili nel vecchio linguaggio, è sostanzialmente incoerente, non pienamente intelligibile, perché i vari principi che governano il suo uso sono fissati arbitrariamente, ossia la definizione di un nuovo principio non è "fedele" ai principi già stabiliti. Quella dell'armonia è dunque una condizione antiolistica, perché se nel vecchio linguaggio sono asseribili enunciati che prima dell'introduzione della nuova espressione non lo erano, allora i significati, sostiene Dummett, sono mutati. Che questo non debba accadere, è quanto si esprimeva dicendo che quando traiamo delle conseguenze dobbiamo attenerci ai vecchi criteri: se, per esempio, contiamo separatamente cinque oggetti del tipo A e otto oggetti del tipo B, sappiamo che se li avessimo contati assieme avremmo ottenuto tredici oggetti in tutto, e ciò secondo gli stessi criteri del contare, ossia anche indipendentemente dal possesso della procedura dell'addizione. Sostenere il contrario, cioè che l'addizione, quando viene introdotta, costituisce un *nuovo* criterio — in un senso non banale — per assegnare la cardinalità ad insiemi finiti, significa assumere che prima di avere l'addizione potremmo aver contato cinque oggetti del tipo A, otto oggetti del tipo B e quattordici oggetti in tutto, *e non avere fatto alcun errore*. "This is highly counter-intuitive, because it is precisely this possibility which we should take the proof as ruling out; if we could be persuaded that it is a genuine possibility, we should reject the proof as fallacious and rate the procedure of addition as of only restricted application" (ibid.).

Basare la propria posizione antiolistica sull'esigenza che i vari principi dell'uso linguistico siano in armonia, può far sorgere un'obiezione. L'olista può sostenere che la presenza nel linguaggio di una molteplicità di principi non è affatto incompatibile con la sua posizione, essendo proprio la comprensione della totalità di tali principi che consente di comprendere il significato delle singole proposizioni. Controbattere che una teoria verificazionista o pragmatista del significato sfugge all'olismo perché presenta un carattere "composizionale" non serve a nulla, se questo significa soltanto che il significato di un enunciato è determinato dalla sua composizione, visto che anche l'olista è pronto ad accettare una simile banalità. In cosa si distingue, allora, una teoria composizionale da una teoria olistica? La differenza sta per Dummett nel fatto che una teoria composizionale è in grado di determinare la *complessità* di ogni enunciato, e quindi di dire, per ogni enunciato α, quali sono gli enunciati di complesssità inferiore da cui il significato di α dipende. Una teoria composizionale sfugge all'olismo perché fissa un limite massimo all'ambito degli enunciati rilevanti per comprendere un certo enunciato, evitando che tale ambito giunga a coincidere con l'intero linguaggio: tutto ciò che si presuppone è una classe (relativamente) ristretta di enunciati di complessità inferiore. E' pertanto chiaro che in una teoria verificazionista del significato il contenuto di un'asserzione non può essere determinato dalla totalità dei mezzi che permettono di stabilirne la verità, perché questi includono argomenti deduttivi contenenti enunciati con un grado di complessità illimitato; e analogamente per una teoria pragmatista. Si potrebbe obiettare, però, che *di fatto* per determinare la verità di un enunciato bisogna far ricorso, in generale, ad enunciati di complessità superiore. E' a questo punto che si inserisce la distinzione tra mezzi diretti e indiretti di provare un enunciato o trarre conseguenze da esso: l'idea di base concernente questa distinzione è che i mezzi diretti procedono secondo la complessità composizionale degli enunciati coinvolti, di cui determinano il significato. Siamo giustificati ad asserire un enunciato quando *avremmo potuto* provarlo facendo ricorso soltanto a mezzi diretti, ossia quando abbiamo un metodo per trasformare le dimostrazioni dell'enunciato in prove canoniche dello stesso. E poiché per Dummett in una prova canonica non devono comparire enunciati di complessità superiore rispetto alla conclusione, questo è in effetti un altro modo per esprimere la condizione di conservatività: deve esserci un'altra prova nel sottolinguaggio ottenuto eliminando gli elementi superflui rispetto alla procedura dimostrativa. Ciò significa, allora, che solo i mezzi diretti (che procedono composizionalmente) sono *costitutivi del significato degli enunciati, mentre i mezzi indiretti sono giustificati* (o meno) dai primi: “From either a verificationist or a pragmatist standpoint, therefore, many deductive arguments will not be constitutive of the meanings of either their conclusions or their premisses, but will contribute to *indirect* means of establishing the former or drawing consequences of the latter. As such, they stand in need of justification. The validity of such arguments must *flow* from the meanings of the logical constants, or of non-logical expressions occurring essentially in them. It has to be shown that the argument is valid in virtue of the meanings of those expressions, *as independently given*" (ibid., 229; corsivi nostri, tranne il primo).

In questo modo nella prospettiva di Dummett le nozioni di armonia (intesa come conservatività), di molecolarismo e di trasformabilità delle dimostrazioni indirette in prove canoniche, si rivelano equivalenti: in un linguaggio in cui prevalga l'armonia le condizioni di asseribilità di un enunciato (il suo significato) sono interamente localizzabili in un sottolinguaggio, i cui enunciati sono di complessità inferiore rispetto all'enunciato in questione; pertanto, ogni dimostrazione dell'enunciato che faccia uso di elementi linguistici di complessità arbitraria è trasformabile in linea di principio in una prova canonica in cui siano coinvolti soltanto enunciati di complessità inferiore. Per Dummett ciò costituisce anche la soluzione del problema della legittimità della deduzione: in un linguaggio in cui sia soddisfatta la condizione di conservatività, le regole di inferenza sono giustificate per il fatto che esse o sono costitutive del significato degli enunciati che permettono di dimostrare, oppure non sono costitutive ma sono tali che le dimostrazioni che vanno a costituire sono trasformabili in prove canoniche in cui non sono presenti enunciati di complessità arbitraria e che quindi non coinvolgono l'intero linguaggio. In questo senso, esse sono “fedeli" al contenuto individuale degli enunciati: non mutando la relazione di derivabilità di un certo frammento di linguaggio quando esso viene esteso, non viene mutato nemmeno il senso di tali enunciati (cfr. Dummett (1973a), 302-303). Questo punto può venire riformulato in maniera leggermente diversa: se in ogni frammento di linguaggio $\mathbb{F}$ la relazione di deducibilità $\mathbb{R}$ è completamente determinata, allora la conservatività assicura che nei linguaggi estesi $\mathbb{F}^*$ siano deducibili *soltanto* quelle conseguenze “contenute" (secondo la $\mathbb{R}$) nelle premesse, quando sia esse che la conclusione sono esprimibili interamente in $\mathbb{F}$. La nozione di estensione conservativa servirebbe quindi ad esplicitare l'idea intuitiva di contenimento delle conseguenze nelle premesse, che viene usualmente impiegata quando si cerca di spiegare la natura dell'inferenza deduttiva.

Perché un insieme di regole di inferenza determini i significati delle costanti logiche, accanto alla conservatività, un'ulteriore restrizione che Dummett ritiene di dover imporre è che “the condition for the correctness of an assertion made by means of a logical constant must always coincide with the existence of a deduction, by means of those rules of inference, to that sentence *from correct premisses none of which contains any of the logical constants in question*" ((1977), 363). Il motivo di ciò è che le regole di inferenza devono essere *sufficienti*, dati i significati di enunciati che non contengono costanti logiche, a determinare le condizioni di asseribilità di enunciati che le contengono (ibid., 364).

La discussione precedente lascia irrisolte alcune questioni essenziali. (1) Anzitutto, bisogna specificare rispetto a quali linguaggi (o frammenti di linguaggi) sia necessario (e legittimo) imporre la condizione di conservatività in relazione al nostro problema, ossia la giustificazione delle leggi logiche. Detto altrimenti: è sufficiente richiedere che l'armonia si realizzi nei soli linguaggi logici, oppure essa deve valere anche nei linguaggi naturali? (2) Esiste un criterio generale per determinare quali siano i metodi diretti di dimostrazione delle varie forme di enunciato? (3) L'idea di base dell'armonia era che le condizioni di asseribilità di un certo enunciato devono garantire la validità delle conseguenze che si possono trarre da tale enunciato, ma non si è in alcun modo reso esplicito in cosa consista questo rapporto di garanzia o giustificazione. Vediamo anzitutto quest'ultima questione. Una prima proposta potrebbe essere questa: il rapporto di giustificazione è dato da una qualche relazione formale di deducibilità, per cui le conseguenze che si possono trarre da un enunciato risultano giustificate o garantite dalle sue premesse quando le prime sono derivabili dalle seconde conformemente alla relazione specificata. Si tratta, come è chiaro, di una risposta del tutto insoddisfacente, in parte perché limita il rapporto di giustificazione ai contesti formali, ma soprattutto perché se il nostro problema è quello di fornire una giustificazione delle leggi logiche, allora assumere come data una relazione di deducibilità non ci farebbe guadagnare nulla. Tuttavia sembra utile esaminare quest'approccio, che consente di ottenere alcune informazioni circa il rapporto tra armonia e conservatività.

I risultati che seguono sono dovuti a Dosen & Schroeder-Heister (1985). Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio in cui la costante φ (di una categoria sintattica arbitraria) non occorre, e sia S un sistema formale espresso in $\mathcal{L}$ e determinato da un insieme $\mathbb{D}$ di regole deduttive. Il sistema S^* è ottenuto estendendo $\mathcal{L}$ con φ, e $\mathbb{D}$ con le corrispondenti regole. Il sistema S è inteso in un senso del tutto generale; tutto ciò che richiediamo è che S^* sia un'estensione propria di S, e che ci siano teoremi in S^* in cui occorre φ. Useremo α, β, γ,... come lettere schematiche per formule del linguaggio esteso $\mathcal{L}^*$ di S^*, e le lettere greche maiuscole come variabili per insiemi di formule. La relazione di deducibilità $\underset{S}{\vdash}$ (che per brevità indicheremo semplicemente con $\vdash$) soddisfa le condizioni seguenti:

(1) $\Phi \vdash \Phi$

(2) $\Phi \vdash \Psi \;\Rightarrow\; \Phi, \Pi \vdash \Psi$

(3) $(\Phi \vdash \Psi \;\&\; \Pi, \Psi \vdash \Sigma) \;\Rightarrow\; \Pi, \Phi \vdash \Sigma$

(4) $\Phi \vdash \Psi \;\Rightarrow\; \Phi \vdash^{*} \Psi$

dove $\vdash^{*}$ è un'abbreviazione per $\underset{S^*}{\vdash}$ (ossia la relazione di deducibilità in una qualche estensione di S).

DEFINIZIONE. Il sistema S^* è un'estensione *strettamente conservativa* di S sse per ogni Φ e Ψ di $\mathcal{L}$, se $\Phi \vdash^* \Psi$, allora $\Phi \vdash \Psi$.
Chiaramente, la conservatività stretta implica la conservatività.
DEFINIZIONE. Siano Γ, Δ, Φ e Ψ insiemi di formule di $\mathcal{L}$, e α una formula in cui occorre φ. L'insieme G_α delle *più deboli condizioni sufficienti* in $\mathcal{L}$ per α (rispetto ad S) è così definito:

$$G_\alpha := [\Gamma \mid \Gamma \vdash^* \alpha \ \wedge\ \forall\Phi(\Phi \vdash^* \alpha \ \Rightarrow\ \Phi \vdash \Gamma)]$$

L'insieme D_α delle *più forti condizioni necessarie* in $\mathcal{L}$ per α (rispetto ad S) è invece dato nel seguente modo:

$$D_\alpha := [\Delta \mid \alpha \vdash^* \Delta \ \wedge \forall\Phi\Psi(\Phi, \alpha \vdash^* \Psi \ \Rightarrow\ \Phi, \Delta \vdash \Psi)].$$

LEMMA. I membri di G_α e di D_α sono interdeducibili:

(1) $(\forall\Gamma_1\Gamma_2 \in G_\alpha)\ (\Gamma_1 \vdash \Gamma_2 \ \wedge\ \Gamma_2 \vdash \Gamma_1)$.

(2) $(\forall\Delta_1\Delta_2 \in D_\alpha)\ (\Delta_1 \vdash \Delta_2 \ \wedge \Delta_2 \vdash \Delta_1)$.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che Γ_1, $\Gamma_2 \in G_\alpha$. Allora abbiamo che $(\Gamma_1 \vdash^* \alpha \ \wedge (\Gamma_2 \vdash^* \alpha \ \Rightarrow\ \Gamma_2 \vdash \Gamma_1))$ e $(\Gamma_2 \vdash^* \alpha \wedge (\Gamma_1 \vdash^* \alpha \ \Rightarrow\ \Gamma_1 \vdash \Gamma_2))$, da cui il lemma segue facilmente. (2) Analogamente. ☐

Per il seguente risultato è necessario assumere che D_α sia non vuoto (ciò limita il suo ambito di validità).

TEOREMA 1. Il sistema S^* è un'estensione strettamente conservativa di S sse per ogni α in cui occorre φ, vale: $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ (\forall\Delta \in D_\alpha)\ \Gamma \vdash \Delta$.
Dimostrazione. [$\Rightarrow$] Sia α una formula tale che $\varphi \in \mathcal{L}(\alpha)$. Allora abbiamo $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ \Gamma \vdash^* \alpha$ e $(\forall\Delta \in D_\alpha)\ \alpha \vdash^* \Delta$. Mediante la condizione (3), otteniamo $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ (\forall\Delta \in D_\alpha)\ \Gamma \vdash^* \Delta$, e dall'ipotesi che S^* sia un'estensione strettamente conservativa di S, risulta che $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ (\forall\Delta \in D_\alpha)\ \Gamma \vdash \Delta$.
[$\Leftarrow$] Supponiamo che $\Phi \vdash^* \Psi$, per $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}$. S^* è un'estensione propria di S, e dunque esiste una formula α (con $\varphi \in \mathcal{L}(\alpha)$) tale che $\vdash^* \alpha$. Per la condizione (2), otteniamo $\Phi, \alpha \vdash^* \Psi$, e dunque, per la definizione di D_α, $(\forall\Delta \in D_\alpha)\ \Phi, \Delta \vdash \Psi$. Per l'ipotesi del teorema, $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ (\forall\Delta \in D_\alpha)\ \Gamma \vdash \Delta$, e assumendo che D_α sia non vuoto, per la (3) abbiamo $(\forall\Gamma \in G_\alpha)\ \Phi, \Gamma \vdash \Psi$. Mostriamo ora che $\Phi \in G_\alpha$. Poiché $\vdash^* \alpha$, vale $\Phi \vdash^* \alpha$, e $\forall\Phi(\Phi \vdash^* \alpha \ \Rightarrow\ \Phi \vdash \Phi)$ è banalmente soddisfatto; dunque abbiamo $\Phi \vdash \Psi$, ossia la conservatività stretta. ☐

L'assunzione della non vuotezza di D_α può essere eliminata, se si ricorre ad un'altra assunzione, e cioè che la conservatività implichi la conservatività stretta (e che quindi le due nozioni siano equivalenti).

Con questa assunzione, possiamo anche semplificare le definizioni.

DEFINIZIONE. Sia Π un insieme di formule in $\mathcal{L}$, β una formula di $\mathcal{L}$, e α una formula in cui occorre φ. Allora abbiamo

$$P_\alpha := [\Pi \mid \Pi \vdash^* \alpha]$$

$$\Sigma_\alpha := [\beta \mid \alpha \vdash^* \beta]$$

dove P_α è l'insieme delle condizioni sufficienti per α in $\mathcal{L}$, e Σ_α è la condizione necessaria massimale per α in $\mathcal{L}$.

TEOREMA 2. Il sistema S^* è un'estensione (strettamente) conservativa di S sse per ogni α tale che $\varphi \in \mathcal{L}(\alpha)$, vale: $(\forall \Pi \in P_\alpha)\ \Pi \vdash \Sigma_\alpha$.
Dimostrazione. [$\Rightarrow$] Per le definizioni, abbiamo $\Pi \vdash^* \alpha$ e $\alpha \vdash^* \Sigma_\alpha$, e per la (3), otteniamo $\Pi \vdash^* \Sigma_\alpha$. Per l'ipotesi del teorema, S^* è un'estensione (strettamente) conservativa si S, e dunque $\Pi \vdash \Sigma_\alpha$.
[$\Leftarrow$] Supponiamo che per $\beta \in \mathcal{L}$ valga $\vdash^* \beta$, e consideriamo inoltre una formula α con $\varphi \in \mathcal{L}(\alpha)$ tale che $\vdash^* \alpha$. Da ciò ricaviamo $\Phi \in P_\alpha$ e $\beta \in \Sigma_\alpha$ (entrambi per a fortiori). Allora, da $(\forall \Pi \in P_\alpha)\ \Pi \vdash \Sigma_\alpha$ otteniamo $\Phi \vdash \Sigma_\alpha$, e dunque $\vdash \beta$. $\Box$

A prima vista i teoremi 1. e 2. sembrano costituire, anche se in contesti limitati e mediante una relazione di deducibilità non adeguata allo scopo di fornire una giustificazione delle leggi logiche, una conferma della tesi secondo cui la conservatività sarebbe una condizione necessaria e sufficiente per l'armonia. Tuttavia ad un più attento esame si vede che gli argomenti tesi a mostrare l'equivalenza di armonia e conservatività (indipendentemente da quale relazione di giustificabilità si utilizzi) si basano su una petizione di principio. La domanda è: perché dovremmo identificare l'armonia con la derivabilità degli insiemi Δ dagli insiemi Γ (riferendoci alle prime definizioni date) nel sistema S, e non *nel sistema* S^* (e più in generale, in una qualche estensione di S)? Chiaramente, se adottassimo quest'ultima soluzione, non potremmo trovare nulla di strano nel fatto che in una condizione di disarmonia (che ora si dovrebbe relativizzare al particolare sistema scelto in cui la derivabilità dovrebbe valere) venga meno la conservatività, visto che in generale non ci aspettiamo che questa valga. Consideriamo i sistemi S_1, S_2, e S_3, ciascuno estensione propria di quello precedente. Dati gli insiemi di formule Γ e $\Delta \in \mathcal{L}(S_1)$ e la formula α contenente una costante φ che appartiene al linguaggio di S_2 ma non a quello di S_1, assumiamo che Γ sia l'insieme delle condizioni sufficienti per α rispetto a S_3, e che Δ sia l'insieme delle condizioni necessarie per α, sempre rispetto a S_3, ma che il rapporto di giustificabilità non valga né in S_1 né in S_2. In tal modo, abbiamo che $\Gamma \vdash \Delta$ vale soltanto rispetto a S_3. Ora, se la nostra assunzione era che per avere l'armonia in S_1 la giustificabilità dovesse valere già in S_2, abbiamo chiaramente una situazione di disarmonia, ma la non conservatività non dipende più da essa, perché potremmo avere l'armonia (se si realizzasse la condizione richiesta) e tuttavia non la conservatività (perché tale condizione deve realizzarsi in un sistema esteso). Più verosimilmente, comunque, in una simile prospettiva abbandoneremmo del tutto la specificazione di un particolare sistema in cui debba essere dimostrata l'armonia, non essendovi motivazioni generali per le quali dovremmo scegliere un sistema piuttosto che un altro. Ciò sembrerebbe svuotare di contenuto la nozione stessa di armonia: se è indifferente in quale sistema o linguaggio essa deve essere dimostrata, perché imporre ancora una simile condizione, visto che con opportuni rafforzamenti dell'apparato linguistico-deduttivo, sarà sempre possibile dimostrare la relazione desiderata? Tuttavia ciò non segue affatto: pur abbandonando ogni specificazione dei linguaggi, resta sempre la possibilità di imporre restrizioni sul *modo* in cui l'armonia debba essere dimostrata, ossia sulla particolare relazione di giustificabilità che può essere assunta come legittima. E' questa, come vedremo, la soluzione di Prawitz.

Se invece non intraprendiamo questa strada, e riteniamo, con Dummett, che la relazione di giustificabilità debba valere nello stesso sistema di cui intendiamo verificare l'armonia, allora abbiamo semplicemente *assunto* la condizione di conservatività, cioè abbiamo assunto che la dimostrazione in un sistema esteso non è in grado di assicurarci la relazione semantica che ci interessa: e questo, d'altra parte, può essere motivato soltanto dalla convinzione che nell'estensione non conservativa del sistema di partenza i significati originari sono cambiati, e quindi non ci troviamo di fronte alle stesse relazioni semantiche. Ma allora siamo entrati in un circolo, perché per dimostrare che la conservatività equivale all'armonia abbiamo interpretato quest'ultima proprio in termini di conservatività. Dunque l'identificazione di Dummett è spuria, o quantomeno non è ottenibile mediante argomenti come quelli che abbiamo considerato. Esistono argomenti di altro tipo? Consideriamo le motivazioni che inducono Dummett ad identificare le due nozioni. Anzitutto, l'assunzione del molecolarismo, che per Dummett equivale a far dipendere il significato di un enunciato da un frammento ristretto del linguaggio: se estendiamo questo frammento, il significato non dipenderà dall'intero linguaggio così ottenuto. In secondo luogo, l'idea che "restare fedeli" a certi significati già dati voglia dire non modificarli. Infine, il verificazionismo: se il significato è dato dalle condizioni di asseribilità, e se estendendo un linguaggio si modificano le condizioni di asseribilità di un enunciato (rendendolo asseribile mentre prima non lo era), allora si sono modificati i significati. La naturale conclusione è allora che restare fedeli ai vecchi significati vuol dire rispettare la condizione di conservatività. In effetti, essa appare immediatamente un ottimo candidato, e per due motivi: (1) esclude che un linguaggio "in ordine" possa essere caratterizzato in termini olistici: i significati non dipendono dall'intero linguaggio, e quando estendiamo il linguaggio i significati non si modificano; (2) si salda con la distinzione prove canoniche/ dimostrazioni, e fornisce una risposta al problema della giustificazione delle leggi logiche: la trasformabilità delle dimostrazioni in prove canoniche coincide con la conservatività, cioè con la possibilità di asserire gli enunciati sfruttando soltanto un frammento del linguaggio che non coinvolge enunciati di complessità superiore, e assicura che gli unici metodi dimostrativi essenziali siano quelli diretti o costitutivi del significato, rispetto ai quali i metodi indiretti validi risultano giustificati perché dispensabili.

In entrambi gli ordini di ragioni, in effetti, traspare l'esigenza di fornire un modello del significato alternativo a quello olistico. Ma è proprio il modo in cui ciò viene fatto che non ci sembra convincente. Identificare la conservatività con l'antiolismo vuol dire pensare che laddove non si hanno estensioni conservative prevalga una situazione di tipo olistico: dunque per Dummett *ci sono linguaggi di cui la tesi dell'olismo è vera*. Ciò è molto strano, e non è certo quanto ci si aspetterebbe da un antiolista: chi rifiuta l'olismo pensa che la *tesi* dell'olismo sia incoerente, e non i *linguaggi* di cui la tesi dell'olismo è vera, perché se la tesi è falsa, allora simili linguaggi non ci sono affatto. Né, d'altra parte, la caratterizzazione di Dummett verrebbe accettata da un olista: questi pensa che *ogniqualvolta* introduciamo nuove regole mutiamo i significati, e che la mancanza di conservatività non sia affatto un sintomo particolare di questo fenomeno; per un olista, che un linguaggio sia un'estensione conservativa di un altro linguaggio è pur sempre un fatto che accertiamo *all'interno* della nostra pratica linguistica, e non un fatto in base al quale stabilire la verità o meno della tesi dell'olismo. La posizione di Dummett appare quindi difficilmente sostenibile: da un lato ammette che l'olismo può essere vero, ma dall'altro lato suppone che sia possibile controllare i linguaggi *dall'esterno* e stabilire, in un senso non banale e quindi decisamente antiolistico, la loro coerenza interna. Questa situazione singolare è ingenerata da una fondamentale confusione. L'idea di fondo dell'armonia è che debbano darsi dei rapporti di dipendenza tra i significati, sì che alcune regole possano essere giustificate da altre regole: risulta quindi immediatamente plausibile che una simile idea possa essere sfruttata per fornire una giustificazione delle leggi logiche. L'armonia è una condizione antiolistica nel seguente senso: essa *presuppone* che l'olismo sia falso, e che quindi risulti sensato indagare la possibilità di una giustificazione della deduzione. Ma essa in alcun modo *implica* la falsità dell'olismo: un olista può coerentemente prendere atto di una teoria che si proponga come giustificazione della deduzione, senza riconoscerle il valore filosofico che l'antiolista le attribuisce, ma semplicemente registrandola come un altro pezzo della nostra pratica linguistica. La confusione consiste nel mancato riconoscimento di questa essenziale differenza.

Riconsideriamo il problema posto da Prior. Egli ha suggerito che ci siano dei fondati motivi per pensare che il significato di un operatore logico non possa essere determinato mediante regole, perché per sapere se queste regole sono valide dobbiamo già sapere se l'operatore in questione ha un significato intelligibile. Si può naturalmente discutere se l'inconsistenza implichi la mancanza di significato intelligibile (cfr. p. es. Cozzo (1994)), ma il punto essenziale sottolineato da Prior è che quando fissiamo delle regole logiche dobbiamo già sapere molto su ciò che è logicamente valido e ciò che non lo è, e che ciò non è dunque desumibile dalle regole stesse: questo è il motivo per cui la teoria della validità analitica non è sostenibile. Da questo punto di vista, Belnap ha solo aggirato il problema, perché le condizioni (conservatività, unicità, ecc.) che possiamo imporre ad un sistema logico sono in ogni caso dettate da una nozione di validità che non ci proviene dalle regole, e allora siamo di nuovo alla conclusione di Prior: il ruolo funzionale non è la radice della validità logica. Belnap, tuttavia, richiedeva dalla conservatività ciò che chiunque sarebbe disposto a richiedere, vale a dire la garanzia di consistenza relativa. Dummett va molto oltre: la conservatività esplicita l'idea intuitiva di armonia, e impone una concezione antiolistica del significato. La soluzione di Dummett al problema di Prior è sostanzialmente questa: i significati sono dati *prima*, in modo tale che le leggi logiche sono giustificate o meno in virtù del significato delle costanti logiche, ma, contrariamente a quanto voleva Prior, questi significati sono dati ancora mediante regole (logiche): ci sono dunque regole costitutive (mezzi diretti) e regole non costitutive (mezzi indiretti). Il rapporto di dipendenza tra queste due classi di regole viene reso esplicito mediante la nozione di conservatività: in questo modo Dummett sostiene di fatto una versione raffinata della tesi della validità analitica. Anche trascurando per il momento il problema di come si possano specificare le regole costitutive, le difficoltà precedentemente esaminate conducono a dubitare dell'adeguatezza di questa soluzione. Se l'equivalenza tra armonia e conservatività non è dimostrabile mediante un argomento non circolare, né è plausibile per il tipo di motivazione che la sorregge (ossia, la necessità di evitare l'olismo), visto che ciò dà luogo ad una posizione fondamentalmente incoerente, sembra di dover concludere che la conservatività non è un candidato sostenibile per esplicitare l'idea di armonia. Questo, d'altra parte, ha conseguenze ancora più generali: almeno una delle premesse che conduce a sostenere l'equivalenza (la particolare nozione di molecolarismo; l'idea che la “fedeltà" dei significati si misuri dalla non modificazione; il verificazionismo) deve essere falsa. Secondo Dummett è essenziale all'idea del molecolarismo che il significato di un enunciato dipenda soltanto da un frammento limitato del linguaggio, i cui enunciati sono tutti di complessità inferiore (si noti che questo senso di molecolarismo non viene rilevato da Prawitz (1987), cfr. cap. 1). Di qui anche la convinzione che in ogni frammento di linguaggio la relazione di deducibilità (o più in generale, di asseribilità) sia interamente determinata, e che dunque le estensioni debbano essere conservative rispetto al frammento dato, pena il mutamento dei significati già fissati. L'idea che le estensioni non conservative mutino il significato dipende inoltre dall'assunzione del verificazionismo: se i significati sono completamente fissati, e se essi consistono nelle condizioni di asseribilità, allora modificando le condizioni di asseribilità si mutano anche i significati. Ciò si scontra con la nostra naturale propensione a considerare le estensioni non conservative come capaci di dimostrare enunciati che mantengono i significati delle teorie di partenza; e se le obiezioni mosse sono in qualche modo convincenti, sembra di dover concludere che l'intera costruzione poggia su basi poco solide.

Una possibile analisi di questa situazione è la seguente. Le difficoltà in cui si dibatte il pensiero di Dummett derivano dall'aver messo assieme punti di vista filosofici essenzialmente inconciliabili: da un lato l'intuizionismo, che, come sostanzialmente ammette lo stesso Dummett (cfr. (1977), 367-368, cit. nel § 3.1.1.), per sua natura è antiolistico, e dall'altro lato l'idea wittgensteiniana del significato come uso, che invece conduce fatalmente all'olismo (cfr. cap. 4.): se i significati sono dati da un complesso di regole, allora è difficile sottrarsi alla conclusione che cambiando le regole si modifichino anche i significati, non soltanto localmente, ma nell'intero linguaggio. L'idea che la conservatività sia un chiaro segno di una situazione in cui l'olismo è falso si può vedere come un tentativo di evitare questa conclusione, ma ciò conduce ad una posizione fondamentalmente incoerente. Ci sembra inoltre che l'antiolismo non sia nemmeno compatibile con la tesi della coestensività e dell'isomorfismo di pensiero e linguaggio, quantomeno nella versione di questa tesi che viene accettata da Dummett. L'idea di fondo su cui poggiano le concezioni olistiche del significato è che il linguaggio *si regga da sé*: sono rilevanti soltanto le connessioni interne al linguaggio, e non anche eventuali rapporti di dipendenza con aspetti non linguistici. Ma questa è la medesima idea che sottende l'estromissione del pensiero dal mentale e l'identificazione del primo col linguaggio: il linguaggio è visto come un elemento indipendente e aprioristico che forgia e costituisce il pensiero, e che non presuppone nulla se non sé stesso. (Ciò non vale, naturalmente, per chi sostenga l'isomorfismo di pensiero e linguaggio ma intenda il pensiero come *Sinn an sich*, alla maniera di Frege). Non è infatti un caso che i filosofi analitici, accettando questa concezione del pensiero, abbiano adottato posizioni di tipo olistico. Dummett ritiene invece di poter assumere l'autonomia del linguaggio senza doverne accettare tutte le conseguenze, e questo non sembra plausibile.

3.1.4. NORMALIZZAZIONE

Uno dei problemi ancora aperti è quello di fornire un plausibile modello esplicativo dell'idea che le regole costitutive del significato (i mezzi diretti) garantiscano la validità delle regole non costitutive (i mezzi indiretti). A questo scopo sono essenziali i risultati di Prawitz (1965) in teoria della dimostrazione, che rappresentano una continuazione dell'opera di G. Gentzen (1935). Gentzen introdusse il calcolo della deduzione naturale nell'intento di costituire un formalismo che rappresentasse il più fedelmente possibile la reale pratica deduttiva. Tuttavia il fondamentale risultato cui egli pervenne attorno alla struttura delle deduzioni fu formulato e dimostrato mediante il calcolo delle sequenze, adatto a trattare anche la logica classica. Questo risultato, che Gentzen chiamò “Hauptsatz", asserisce che la seguente regola

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\alpha \quad \alpha,\Phi\Rightarrow\Psi}{\Gamma,\Phi\Rightarrow\Delta,\Psi}$$

detta cesura (Schnitt), è eliminabile dal calcolo (dove la sequenza $\Gamma \Rightarrow \Delta$ va letta nel seguente modo: se tutte le formule appartenenti a Γ sono vere, allora esiste almeno una formula appartenente a Δ che è vera). Poiché la cesura è l'unica regola del calcolo che permette di eliminare delle formule nel corso di una dimostrazione, lo Hauptsatz ci assicura che una dimostrazione è sempre trasformabile in una nuova dimostrazione avente la stessa sequenza finale in cui non accade che certe formule vengano prima introdotte e successivamente eliminate. Ciò significa, nelle parole di Gentzen, che “Der Hauptsatz besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eindeutige, Normalform bringen läßt. Die Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege. Es werden in ihm keine Begriffe eingeführt, welche nicht in seinem Endergebnis enthalten sind und daher zu dessen Gewinnung notwendig verwendet werden müssen" ((1935), 177). In questo modo si ha anche il *principio della sottoformula*: tutte le formule che occorrono in una deduzione in forma normale sono sottoformule delle formule che occorrono nella sequenza finale.

Nella convinzione che il calcolo N della deduzione naturale sia più adatto ad analizzare la struttura delle dimostrazioni, perché (1) le sue regole sono strettamente aderenti ai significati delle costanti logiche, e (2) il significato della trasformabilità delle deduzioni in una forma normale diventa più perspicuo, Prawitz (1965) ha fornito una dimostrazione equivalente allo Hauptsatz, nota come teorema di *normalizzazione*. Il metodo per dimostrare la normalizzabilità delle deduzioni deriva anch'esso, comunque, da un'idea di Gentzen. Nel calcolo N, il ruolo deduttivo delle costanti logiche è determinato da regole di due tipi: le regole di introduzione e le regole di eliminazione; per ciascuna costante logica ci sono regole di entrambi i tipi. Una regola di introduzione consente di inferire una formula α che ha ξ come operatore principale da sottoformule di α. La I-regola per ξ costituisce quindi una condizione sufficiente per inferire formule che hanno ξ come operatore principale. Una regola di eliminazione per una costante logica ξ consente invece di compiere inferenze a partire da formule che hanno ξ come operatore principale. Nel seguito, adotteremo la seguente notazione. $<\alpha_1,...,\alpha_n> \Rightarrow \beta$ rappresenta una regola schematica che a partire dalle premesse $\alpha_1,...,\alpha_n$ permette di inferire la conclusione β. Una regola può scaricare premesse, ovvero può permettere di inferire una certa conclusione che risulta indipendente da assunzioni precedentemente fatte nel corso della dimostrazione. In questo caso, la premessa scaricata verrà identificata mediante l'uso di parentesi quadre. Per esempio, $<[\alpha]\ \beta> \Rightarrow \gamma$ rappresenta una regola che permette di scaricare la premessa α da cui β dipende, ma da cui non dipende la formula inferita γ. Una regola schematica può o meno comprendere la specificazione delle deduzioni che si concludono con le premesse della regola (a partire da certe premesse, eventualmente scaricate dall'applicazione della regola stessa): $<\mathbb{D}_1\alpha_1,...,\mathbb{D}_n\alpha_n> \Rightarrow \beta$, oppure $<[\alpha_1]\mathbb{D}_1\beta_1,...,[\alpha_n]\mathbb{D}_n\beta_n> \Rightarrow \gamma$. E' inoltre possibile che sia indicata anche la regola mediante cui una certa premessa è stata inferita: $<<\alpha> \Rightarrow \beta> \Rightarrow \gamma$. Si noti che la premessa è qui soltanto β, e non $<\alpha> \Rightarrow \beta$; considereremo nel capitolo successivo una generalizzazione della deduzione naturale in cui siano ammesse regole come premesse, e in cui sia anche possibile scaricare regole.

Il calcolo N è caratterizzato dalle seguenti regole:

$(\wedge I)$ $<\alpha, \beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta$	$(\wedge E)$ $<\alpha \wedge \beta> \Rightarrow \alpha$ $<\alpha \wedge \beta> \Rightarrow \beta$
$(\vee I)$ $<\alpha> \Rightarrow \alpha \vee \beta$ $<\beta> \Rightarrow \alpha \vee \beta$	$(\vee E)$ $<\alpha \vee \beta, [\alpha]\, \gamma, [\beta]\, \gamma> \Rightarrow \gamma$
$(\rightarrow I)$ $<[\alpha]\, \beta> \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	$(\rightarrow E)$ $<\alpha, \alpha \rightarrow \beta> \Rightarrow \beta$
$(\forall I)$ $<\alpha(x)> \Rightarrow \forall x\alpha(x)$	$(\forall E)$ $<\forall x\alpha(x)> \Rightarrow \alpha(t)$
$(\exists I)$ $<\alpha(t)> \Rightarrow \exists x\alpha(x)$	$(\exists E)$ $<\exists x\alpha(x), [\alpha(x)]\, \beta> \Rightarrow \beta$
$(\perp_{\mathrm{I}})$ $<\perp> \Rightarrow \beta$	$(\perp_{\mathrm{C}})$ $<[\neg\alpha]\ \perp> \Rightarrow \alpha$

Restrizioni. Il parametro proprio (Eigenvariable) x di una $(\forall I)$ non deve occorrere nelle premesse da cui $\forall x\alpha(x)$ dipende; il parametro proprio di una $(\exists E)$ non deve occorrere né in β né nelle premesse da cui β dipende. Con la prima restrizione, garantiamo che il parametro proprio dell'inferenza sia del tutto generico; con la seconda, che la formula inferita sia davvero indipendente dalla formula scaricata.
Se definiamo la negazione ponendo $\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp$, allora mediante le regole per l'implicazione si ricavano anche le regole della negazione:

$(\neg I)$ $<[\alpha]\ \perp> \Rightarrow \neg\alpha$	$(\neg E)$ $<\alpha, \neg\alpha> \Rightarrow \perp$

Gentzen osservò che tra le regole di introduzione e quelle di eliminazione sussiste un rapporto sistematico di dipendenza: “Die Einführungen stellen sozusagen die 'Definitionen' der betreffenden Zeichen dar, und die Beseitigungen sind letzten Endes nur Konsequenzen hiervon, was sich etwa so ausdrücken läßt: Bei der Beseitigung eines Zeichens darf die betreffende Formel, um deren äußerstes Zeichen es sich handelt, nur 'als das benutzt werden, was sie auf Grund der Einführung dieses Zeichens bedeutet'. [...] Durch Präzisierung dieser Gedanken dürfte es möglich sein, die B-Sclüsse auf Grund gewisser Anforderungen als *eindeutige Funktionen* der zugehörigen E-Sclüsse nachzuweisen" ((1935), 189; corsivi nostri). Prawitz ha sviluppato queste indicazioni, rendendo esplicito il rapporto tra i due tipi di regole mediante il *principio di inversione*: “an elimination rule is, in a sense, the inverse of the corresponding introduction rule: by an application of an elimination rule one essentially only restores what had already been established if the major premiss of the application was inferred by an application of an introduction rule" ((1965), 33). Più precisamente, il principio può essere formulato nel seguente modo:

PRINCIPIO DI INVERSIONE. Sia $\mathcal{A}$ un'applicazione di una regola di eliminazione che ha β come conseguenza. Allora, le deduzioni che soddisfano la condizione sufficiente (data da una delle regole di introduzione) per derivare la premessa maggiore di $\mathcal{A}$, eventualmente assieme a deduzioni delle premesse minori di $\mathcal{A}$, se ve ne sono, “contiene" già una deduzione di β; la deduzione di β è dunque ottenibile direttamente dalle deduzioni date senza l'impiego di $\mathcal{A}$.

Ciò significa, essenzialmente, che una deduzione è sempre trasformabile in una nuova deduzione in cui nessuna formula sia al contempo la conclusione dell'applicazione di una I-regola e la premessa maggiore dell'applicazione di una E-regola; vale a dire, in cui non occorra alcuna *formula massimale*. Le formule massimali possono essere sistematicamente eliminate mediante le seguenti *procedure di riduzione*, che esplicitano come in ciascun caso operi il principio di inversione.

$$<<\mathbb{D}_1\alpha, \mathbb{D}_2\beta> \Rightarrow \alpha \wedge \beta> \Rightarrow \alpha \quad \triangleright \quad \mathbb{D}_1\alpha$$

$$<<\mathbb{D}_1\alpha> \Rightarrow \alpha \vee \beta, [\alpha]\mathbb{D}_2\,\gamma, [\beta]\mathbb{D}_3\,\gamma> \Rightarrow \gamma \quad \triangleright \quad \mathbb{D}_1[\alpha]\mathbb{D}_2\gamma$$

$$<\mathbb{D}_1\alpha, <[\alpha]\mathbb{D}_2\,\beta> \Rightarrow \alpha \to \beta> \Rightarrow \beta \quad \triangleright \quad \mathbb{D}_1[\alpha]\mathbb{D}_2\beta$$

$$<<\mathbb{D}_1\alpha(x)> \Rightarrow \forall x\alpha(x)> \Rightarrow \alpha(t) \quad \triangleright \quad \mathbb{D}_1(x/t)\alpha(x/t)$$

$$<<\mathbb{D}_1\alpha(t)> \Rightarrow \exists x\alpha(x), [\alpha(x)]\mathbb{D}_2\,\beta> \Rightarrow \beta \quad \triangleright \quad \mathbb{D}_1[\alpha(t)]\mathbb{D}_2(x/t)\,\beta$$

Queste procedure sono lo strumento essenziale per la dimostrazione del teorema di normalizzazione; le altre procedure hanno carattere accessorio. Una dimostrazione in forma normale ha le seguenti caratteristiche: le applicazioni delle regole di eliminazione occorrono solo nella parte iniziale, detta *parte analitica*; le applicazioni delle regole di introduzione occorrono invece solo nella parte finale, detta *parte sintetica*. Fra le due parti (che possono essere entrambe vuote) si trova una parte *minimale* in cui possono occorrere inferenze atomiche. Ciò vuol dire che le premesse delle deduzioni vengono anzitutto decomposte per mezzo delle regole di eliminazione, e che successivamente le sottoformule così ottenute vengono ricombinate mediante le regole di introduzione. Nel caso della logica intuizionistica, la normalizzazione ha come corollario il principio della sottoformula: ogni formula che occorre in una deduzione in forma normale di α a partire dalle premesse Γ è una sottoformula di α o di una formula di Γ. Nel caso classico, la normalizzazione è dimostrabile solo a patto di eliminare dal calcolo le regole per $\exists$ e $\vee$ (ciò non comporta alcun indebolimento, per l'interdefinibilità delle costanti logiche), e il principio della sottoformula che ne risulta è più debole. Questo fatto è dovuto alla regola classica dell'assurdo (cfr. § 3.2.2).

La normalizzabilità costituisce sia per Dummett che per Prawitz il paradigma di analisi della nozione di prova canonica e della giustificazione delle leggi logiche, anche se in due sensi fondamentalmente diversi. Per Dummett, il teorema di normalizzazione per la logica intuizionistica è un risultato essenziale perché esso garantisce anzitutto la condizione di conservatività. Abbiamo visto che secondo Dummett si dà armonia quando il linguaggio è un'estensione conservativa di ciò che rimane eliminando da esso un'espressione qualsiasi. Ciò significa che se nel linguaggio possiamo asserire un enunciato che non contiene l'espressione data, questo enunciato deve essere asseribile già nel sottolinguaggio privato di quell'espressione. Ossia, deve esserci un altro modo per asserirlo. Questa condizione è proprio quanto viene assicurato, relativamente alle costanti logiche, dalla normalizzabilità. Infatti, se abbiamo dimostrato una proposizione non contenente la costante ξ, ogni enunciato che è stato impiegato nella procedura dimostrativa e che conteneva la costante in questione deve essere stato prima introdotto e poi eliminato nel corso della dimostrazione. Ma se simili passaggi ridondanti sono eliminabili, possiamo sempre ottenere una dimostrazione avente la stessa conclusione ma che non fa uso di tali enunciati, e dunque il linguaggio è un'estensione conservativa di quello ottenuto omettendo ξ. Dunque la naturale conclusione è per Dummett quella di identificare le prove canoniche con le dimostrazioni in forma normale ((1977), 396). In questo modo, abbiamo un modello che incorpora tutti i principi dummettiani: (1) le prove canoniche procedono composizionalmente; (2) la trasformabilità delle dimostrazioni in prove canoniche viene spiegata in modo chiaro; (3) la conservatività assicura l'armonia e la falsità dell'olismo.

Le procedure di riduzione, d'altra parte, costituiscono un'esplicitazione dell'idea che le condizioni di asseribilità degli enunciati garantiscano la validità delle conseguenze correttamente inferibili da tali enunciati. Se si prendono sul serio le osservazioni di Gentzen, come ha fatto Prawitz, diventa naturale pensare alle regole del calcolo N come alle regole d'uso delle costanti logiche, dove le regole di introduzione specificano le condizioni di asseribilità , e le regole di eliminazione i principi che determinano le conseguenze degli enunciati asseriti; inoltre, le regole di introduzione si propongono come autogiustificanti, in quanto definiscono il significato stesso delle costanti logiche che governano, e le regole di eliminazione vengono *giustificate* dalle prime, grazie all'esistenza delle procedure di riduzione. Il motivo sostanziale che induce Prawitz a considerare le regole di introduzione come determinanti il significato delle costanti logiche è la loro stretta corrispondenza con l'interpretazione BHK: "the introduction inferences represent the form of proof of compound formulas by the very meaning of the logical constants *when constructively understood*" ((1973), 234; corsivi nostri). Quest'idea è parzialmente condivisa anche da Dummett: nella spiegazione BHK non sono assunte come costitutive del significato anche le regole di eliminazione, perché altrimenti la spiegazione sarebbe del tutto vacua. Consideriamo per esempio il quantificatore universale: se anche la regola di eliminazione fosse costitutiva, allora il possesso di un metodo che, applicato ad ogni termine t, produca una dimostrazione di $\alpha(t)$ (ossia, il possesso di una dimostrazione di $\forall x\alpha(x)$) sarebbe sempre banalmente rinvenibile ogniqualvolta avessimo una dimostrazione intuitivamente valida di $\forall x\alpha(x)$, essendo sufficiente applicare a questa il dictum de omni. Ma in questo modo l'interpretazione BHK non imporrebbe alcuna restrizione sulla forma delle dimostrazioni che riconosciamo come valide, perché le sue condizioni risulterebbero automaticamente soddisfatte a patto che le dimostrazioni ritenute intuitivamente valide possano contenere certi passaggi inferenziali dati dall'applicazione delle regole di eliminazione. “Obviously, however, this is not what is intended when these explanations of the logical constants are given; we are not appealing to an already understood notion of proof, of which notion the validity of the elimination rules is partially constitutive, but laying down what is to count as a proof in such a way that the validity of those rules follows as a consequence" ((1977), 393). Dummett non pensa tuttavia che le regole di introduzione rappresentino fedelmente l'interpretazione intuizionistica. Nel caso dell'introduzione dell'implicazione, per esempio, siamo autorizzati a trasformare ogni prova di α in una prova di β semplicemente facendo seguire una prova di β dall'ipotesi α, mentre un costruttivista richiede che si abbia un *metodo effettivo* per trasformare una prova di α in una prova di β ((1991), 273). Ciò costituisce un sintomo, per Dummett, dell'ancora imperfetto stadio di formalizzazione della matematica intuizionista (cfr. (1977), 103).

L'idea che le regole di introduzione determinino il significato degli operatori logici si articola nelle due tesi seguenti:
(1) Ogni inferenza effettuata secondo tali regole è automaticamente valida;
(2) Ogni enunciato complesso, se asseribile, deve poter essere asserito mediante un argomento il cui ultimo passo è dato dall'impiego della regola di introduzione dell'operatore principale dell'enunciato (seguendo Dummett, chiameremo questa seconda tesi “assunzione fondamentale").
Se si accettano queste due tesi, diventa chiaro in che senso, sfruttando le procedure di riduzione, si riesca a giustificare le regole di eliminazione: dato un argomento che si conclude con l'applicazione di una regola di eliminazione per l'operatore ξ — che dunque è l'operatore principale della premessa maggiore $\xi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ della E-regola —, e supponendo che l'argomento che si conclude con la premessa maggiore della regola di eliminazione sia valido (ossia, che la premessa maggiore sia correttamente asseribile), se applichiamo l'assunzione fondamentale otteniamo un nuovo argomento in cui $\xi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ è ottenuta mediante l'applicazione di una I-regola per ξ — le cui premesse (eventualmente assieme alle premesse minori) contengono già la conclusione della E-regola, come è facile vedere dalle procedure di riduzione. In generale, questo metodo mostra che, data una derivazione legittima delle premesse della regola di eliminazione, possiamo sempre ottenere una derivazione legittima delle conseguenze, e ciò senza l'applicazione della regola di eliminazione stessa. Le regole di eliminazione sono giustificate per il

fatto di essere dei metodi indiretti per giungere alle conclusioni che potremmo già ottenere con le regole di introduzione. E' in ciò che queste ultime garantiscono la validità delle prime. In questo modo abbiamo una risposta raffinata alla domanda circa la relazione di giustificabilità che è in gioco nella nozione di armonia: si tratta di una dipendenza strutturale e immediatamente chiara, che in certo qual modo spiega la metafora del “contenimento" delle conclusioni nelle premesse. D'altra parte, come è chiaro, per ottenere ciò abbiamo fatto ricorso a delle forti assunzioni: non solo quella della validità di certe regole, ma anche della loro esaustività nel determinare i mezzi canonici per asserire enunciati aventi le corrispondenti costanti logiche come operatore principale. Discuteremo in seguito questo problema; per il momento la questione rilevante è che uso si possa fare di questi risultati per rendere esplicita l'idea di prova canonica. Chiaramente, nella prospettiva di Dummett essi sono essenziali per la specificazione della nozione di armonia, visto che rendono chiaro quale rapporto di giustificazione esista tra condizioni di asseribilità e conseguenze. Tuttavia, questa modalità di giustificazione delle leggi logiche permette a Prawitz di sviluppare un approccio alternativo a quello di Dummett, svincolando l'armonia dalla nozione di conservatività. Abbiamo pertanto il seguente

PRINCIPIO PRAWITZIANO DI ARMONIA. Le conseguenze inferibili da un certo enunciato devono valere in virtù delle condizioni per asserire tale enunciato. Derivare il contenuto dell'enunciato mediante una E-regola giustificata vuol dire derivare solo ciò che è derivabile dalle premesse della I-regola (cfr. Prawitz (1977), 24).

Come si vede, si tratta di una specificazione della nozione di armonia già presente in Dummett; sembra tuttavia opportuno attribuirla in particolare a Prawitz in vista del fatto che per Dummett l'armonia coincide essenzialmente con la conservatività, e che è stato Prawitz a sfruttare sistematicamente questa nozione e a distinguerla dall'accezione dummettiana (cfr. Prawitz (1977)). Recentemente, per distinguere i due sensi di armonia, Dummett ha chiamato “armonia intrinseca" quella attestata dalla giustificabilità delle regole di eliminazione sulla base delle regole di introduzione, e “armonia totale o contestuale" la nozione di conservatività (cfr. (1991), 250). Nella letteratura sull'argomento, le due nozioni sono state distinte esplicitamente per la prima volta da Tennant (1987). Anche se limitatamente al caso proposizionale, Prawitz (1978) ha introdotto delle regole schematiche di introduzione e di eliminazione intese ad esplicitare il principio di armonia sopra enunciato, e da cui ovviamente devono potersi derivare le regole usuali, o almeno regole equivalenti. Una regola schematica di introduzione per un operatore enunciativo n-ario è data da s (s ≥ 0) schemi della forma

$$< \begin{matrix}[\,H^i_{1,1}]\\ \vdots\\ [H^i_{1,h^i_1}]\end{matrix}\mathbb{D}_1\, G^i_1,\dots,\begin{matrix}[\,H^i_{j_i,1}\,]\\ \vdots\\ [H^i_{j_i,h^i_{j_i}}]\end{matrix}\mathbb{D}_{j_i} G^i_{j_i} > \Rightarrow \xi(F_1,\dots,F_n)$$

per i=$1, 2, \dots,$ s, dove F_k, G^i_p, $H^i_{p,r}$ (k=$1, 2, \dots, n$; p=$1, 2, \dots, j_i$; r=$1, 2, \dots, h^i_p$) sono formule schematiche costituite da variabili sintattiche per enunciati e da operatori enunciativi. Secondo questo schema si può inferire una formula $\xi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ da j_i premesse $\beta^i_1,...,\beta^i_{j_i}$, eventualmente scaricando assunzioni della forma $\gamma^i_{p,1},...,\gamma^i_{p,h^i_p}$ da cui dipende la p-esima premessa β^i_p, dove le α, β, γ sono formule ottenute dalle corrispondenti *F*, *G*, *H* per sostituzione simultanea delle variabili sintattiche per formule. La nostra regola schematica di introduzione ammette dunque di inferire delle conclusioni ponendo delle restrizioni unicamente sulla forma delle premesse e delle assunzioni scaricate dall'inferenza.

DEFINIZIONE. Una regola di inferenza schematica è detta *indipendente* se tutte le formule schematiche *F*, *G*, *H* che vi compaiono consistono unicamente di variabili sintattiche per enunciati; se invece le formule schematiche contengono anche delle costanti logiche, la regola viene detta *dipendente* (dall'insieme delle costanti logiche che occorrono nelle formule schematiche).

DEFINIZIONE. Una regola di introduzione schematica è detta *esplicita* se gli schemi $F_1,...,F_n$ consistono di variabili sintattiche per enunciati e le G e H non contengono altre variaabili sintattiche oltre a queste, e inoltre se il segno principale ξ della conclusione non occorre nelle formule G e H; altrimenti è detta *implicita*.

Le usuali regole di introduzione per $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ sono ovviamente indipendenti ed esplicite; mostriamo ora che esse sono anche schematiche. Per $\wedge$, abbiamo s=1, j_1=2, h^1_1=h^1_2=0, e G^i_p=F_p (p=1, 2); per $\vee$, abbiamo s=2, j_1=j_2=1, h^1_1=h^2_1=0, e G^i_1=F_i (i=1, 2); per $\rightarrow$, abbiamo s=j_1=h^1_1=1, G^1_1=F_2, e $H^1_{1,1}$=F_1. La regola di introduzione *vuota* per una costante proposizionale a zero posti, ossia con s=0 e n=0, è la regola di introduzione schematica per $\perp$; in altri termini, non esiste una regola di inferenza avente $\perp$ come conclusione.

La regola schematica di eliminazione per un operatore proposizionale *n*-ario ξ sarà invece uno schema della forma

$$<\xi(F_1,...,F_n), \Gamma_1\mathbb{D}_1\ A,...,\Gamma_i\mathbb{D}_i\ A,...,\Gamma_n\mathbb{D}_n\ A> \Rightarrow A$$

con s premesse minori della forma A, e dove le assunzioni da cui dipende la i-esima ($i \leq$ s) premessa minore possono essere scaricate quando hanno una delle seguenti forme:

$$\Gamma_i = \bigcap_{r \leq h^i_1} H^i_{1,r} \rightarrow G^i_1,..., \bigcap_{r \leq h^i_{j_i}} H^i_{j_i,r} \rightarrow G^i_{j_i}$$

(dove $\bigcap$ indica la congiunzione reiterata). Nel caso in cui h^i_p=0, l'implicazione è sostituita dal suo conseguente. In questo modo abbiamo una formulazione ocrrispondente all'idea che ciò che una E-regola giustificata deve inferire è quel che è contenuto nel ξ-enunciato, ossia ciò che è derivabile dalle sue premesse. Tuttavia, questa formulazione non è adeguata per il caso dell'implicazione: come ha osservato Schroeder-Heister (1982), dalla regola schematica di eliminazione possiamo ricavare soltanto la regola $<\alpha \to \beta, [\alpha \to \beta]\ \gamma> \Rightarrow \gamma$, da cui non è derivabile il modus ponens. Questo problema ha indotto Schroeder-Heister a riformulare il principio prawitziano di armonia, sfruttando un calcolo generalizzato della deduzione naturale, in una direzione che però diverge in maniera sostanziale dal metodo Gentzen-Prawitz di giustificazione delle leggi logiche (cfr. cap. 4).

Come Prawitz ha sottolineato sin dalle sue prime osservazioni sul pensiero di Dummett, la nozione di armonia non deve essere identificata con la conservatività, semplicemente perché non è plausibile richiedere quest'ultima. Il motivo di ciò è per Prawitz essenzialmente il teorema di Gödel, in base al quale non si può assumere che le condizioni di asseribilità degli enunciati (specificamente, di quelli condizionali ed universali) siano esaurite entro un particolare linguaggio e sistema formale, mentre era proprio questa l'assunzione che sottende l'idea della conservatività e che già Belnap aveva reso esplicita. Dice Prawitz: “there is no formal system generating all the procedures that transform canonical proofs of A to canonical proofs of B, and it is left open what more complicated sentences can be involved in such procedures. For instance, such a procedure may be definable in an extension of a certain language without being definable in the language itself, and hence, in this respect, the extension of a language obtained by introducing new logical constants *may not be a conservative extension of the original language*. Consequently, while the operations of forming canonical proofs run parallel to the introduction rules of Gentzen's system of natural deduction, it is clear that *the rules for asserting a sentence do not amount to inference rules in any formal system*" ((1977), 29; corsivi nostri). Per Prawitz, in effetti, se volessimo restringere la nozione pertinente di dimostrazione a quella di dimostrazione in un sistema formale, dovremmo anche rinunciare alla tesi secondo cui le regole di introduzione del calcolo N siano in stretto accordo con le clausole della BHK, perché nel caso dell'implicazione, per esempio, avremmo un vistoso punto di divergenza: “constructively, $A \to B$ is interpreted as asserting the existence of a construction by which *any* construction of A can be transformed to a construction of B, which is weaker than asserting the existence of a proof [in a formal system] of B from A; such a proof gives *a particular kind of uniform construction* transforming constructions of A to constructions of B, which is not required by the usual constructive interpretation" ((1971), 275-276; corsivi nostri). Secondo la BHK, pertanto, “there is no restriction on the inferences and notions used in a proof of B from A except that it yields a proof of B when combined with a proof of A" ((1987a), 476-477). Ciò significa, essenzialmente, che la nozione di prova canonica non può essere assimilata a quella di dimostrazione in forma normale, perché la normalizzazione è ottenibile soltanto all'interno di un sistema formale (e nel caso in cui tale sistema non sia puramente logico, quando è ottenibile, bisogna ricorrere ad ulteriori assunzioni, quali per esempio l'induzione sugli ordinali), e ciò restringe le possibili modalità dimostrative, per cui non è sempre plausibile richiedere che se abbiamo una dimostrazione, allora possiamo trasformarla in una prova canonica.

La motivazione di Prawitz può essere anche formulata nel seguente modo. Il teorema di Gödel mostra che la relazione di deducibilità entro un sistema non è adeguata rispetto alla nozione intuitiva di conseguenza logica, secondo la quale, egli sostiene, gli enunciati di Gödel sono invece conseguenza degli assiomi (cfr. §§ 2.3 e 2.4). Poiché una relazione autentica di conseguenza non è ottenibile se ci si confina ad un particolare linguaggio, si deve concludere che l'armonia intesa come conservatività non assicura una nozione di conseguenza logica semanticamente profonda. Per Prawitz, che α non sia derivabile da Γ in $\mathcal{L}$ ma lo sia nel linguaggio esteso $\mathcal{L}^*$, non significa che in $\mathcal{L}^*$ si possa derivare una conclusione α non “contenuta" nelle premesse Γ, perché nessun linguaggio determina completamente la relazione di conseguenza fra gli enunciati in esso esprimibili.

Nel caso specifico delle costanti logiche, l'insistenza di Dummett sulla necessità di imporre la conservatività è motivata in particolare dall'esigenza di evitare una definizione impredicativa di esse. L'interpretazione BHK, per gli operatori $\forall$, $\rightarrow$, e $\neg$, fa riferimento ad una totalità di dimostrazioni, che possono contenere enunciati di complessità illimitata. Consideriamo per esempio l'implicazione: si dà una prova di $\alpha \rightarrow \beta$ quando esiste un metodo effettivo che trasforma *ogni* prova di α in una prova di β. Ma allora, non è escluso che nelle prove di α, e nelle procedure che trasformano le prove di α in prove di β, occorra la stessa $\alpha \rightarrow \beta$ o formule di complessità superiore, con la conseguenza che per giungere a sapere in cosa consista una prova di un certo enunciato bisogna, di fatto, già saperlo. Questo, osserva Dummett, è fallimentare per una teoria costruttivistica del significato, perché il significato di un certo enunciato viene a dipendere da teorie matematiche di complessità arbitraria. E' dunque necessario che le dimostrazioni siano ordinabili gerarchicamente secondo la loro complessità: “for any given statement, if it can be proved at all, then it can be proved by a proof whose complexity does not exceed a bound depending on the structure of the statement. [...] If the intuitionistic explanations of the logical constants and, more generally, of the meanings of mathematical statements are to be considered as constituting a coherent theory of meaning for the language of mathematics, then the notion of proof that is appealed to must be such that we can fully grasp the concept of a proof of any constituent of a given sentence *in advance of grasping that of a proof of that sentence*" ((1977), 394-402; corsivi nostri). Le dimostrazioni in forma normale si propongono allora come il modello privilegiato per intendere la nozione di prova canonica, in cui non devono occorrere enunciati di complessità maggiore rispetto alla conclusione. Dummett affronta anche la questione della non circoscrivibilità dei metodi di prova entro una data formalizzazione, ma a quanto pare egli non pensa che questo problema sia da identificare con quello dell'inadeguatezza dei sistemi formali a rappresentare i mezzi disponibili per dimostrare enunciati condizionali o universali (ibid., 399). Il problema della non circoscrivibilità è originato semplicemente dall'incessante sviluppo delle teorie matematiche, per cui una formalizzazione può dirsi “completa" solo rispetto ad un certo stadio di tale sviluppo, e lo è precisamente quando permette di

dimostrare tutti gli enunciati che appartengono al linguaggio della teoria e che sono dimostrabili (ibid., 398). Il problema della rappresentazione entro un sistema (caratterizzato da forme inferenziali specifiche) delle modalità dimostrative degli enunciati condizionali e universali non è invece per Dummett un vero problema, essendo sufficiente specificare, relativamente ad ogni stadio di sviluppo, ciò che si richiede perché enunciati di quella forma siano dimostrabili; e ciò può essere fatto, continua Dummett, mediante degli assiomi aventi la forma, per ogni enunciato α, "$\alpha \rightarrow$ esiste una dimostrazione di α avente le proprietà P_1,...,P_n". In questo modo avremmo degli assiomi che impongono delle restrizioni sulla forma delle dimostrazioni possibili di α, sulla base della struttura di quest'ultima, e che quindi specificano ciò che si richiede ad una dimostrazione (sempre relativamente ad ogni stadio di sviluppo). Dato un enunciato γ, Dummett propone allora di definire una prova canonica di γ come una dimostrazione in forma normale dell'enunciato γ^* siffatto:
$(\alpha_1 \rightarrow \exists p_1((p_1 \vdash \alpha_1) \wedge (P_1^1(p_1) \wedge ... \wedge P_n^1(p_1))) \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \exists p_n((p_n \vdash \alpha_n) \wedge (P_1^n(p_n) \wedge ... \wedge P_n^n(p_n)))) \rightarrow$
$\rightarrow \gamma$(con α_i $(1 \leq i \leq n)$ chiusura universale di una sottoformula di γ, per ogni sottoformula) (ibid., 400).

Questa soluzione presenta delle grosse difficoltà. Anzitutto, non si vede in che senso la fissazione di restrizioni sulla forma delle dimostrazioni possibili mediante assiomi (che in ogni caso Dummett ha lasciato come una semplice proposta programmatica) possa essere una risposta all'obiezione sollevata da Prawitz, dato che per il teorema di Gödel abbiamo una forma di incompletezza essenziale dei sistemi formali, che non ha nulla a che fare con l'evoluzione delle teorie matematiche: rimane il fatto che ad ogni stadio di sviluppo di una teoria formale, questa sarà incompleta, e dunque la specificazione di assiomi relativamente a tale stadio lascia il problema inalterato. Presumibilmente, è qui in gioco la convinzione di Dummett che il teorema di Gödel non dimostri l'inadeguatezza dei sistemi formali rispetto all'intuizione, ma l'intrinseca vaghezza del concetto di numero (cfr. § 2.4.), per cui non vi sarebbe alcun vero iato tra i concetti formali e i concetti intuitivi. In ogni caso, lo stesso Dummett rileva una conseguenza alquanto singolare dell'imposizione di assiomi che specifichino la forma delle dimostrazioni. Ad un certo stadio di sviluppo di una teoria, può essere stato dimostrato un enunciato α sulla base di certe restrizioni che sono state imposte sulla sua dimostrazione: per esempio, se l'enunciato è della forma $\beta \rightarrow \gamma$, le restrizioni riguardano i metodi ammissibili per dimostrare β e γ. Successivamente, vengono riconosciuti come legittimi dei metodi che prima non erano ammessi, e dunque le restrizioni vengono indebolite: ma allora può accadere che non tutti i metodi per dimostrare β siano trasformabili in dimostrazioni di γ, e dunque la dimostrazione di $\beta \rightarrow \gamma$ può essere invalidata. In questo modo, per l'interpretazione costruttivistica dell'implicazione, congiuntamente alla nozione dummettiana di prova canonica, la dimostrabilità non sarebbe più da considerarsi una proprietà irreversibile, fatto dal quale Dummett conclude che "*the very meanings of our mathematical statements are always subject to shift*" ((1977), 401; corsivi nostri).

Come Prawitz (1987) non ha mancato di notare, una simile posizione è scarsamente plausibile, perché va contro la nostra esperienza ed è sostanzialmente, egli aggiunge, una teoria *olistica* del significato. Nel seguito, chiameremo "*controservativa*" un'estensione T^* di una teoria T quando esiste almeno un enunciato che è dimostrabile in T ma non lo è in T^* (ciò non esclude, naturalmente, che T^* sia un'estensione conservativa di T, nel senso definito sopra). Se assumiamo che i significati mutino quando viene meno la conservatività, sicuramente dovremo anche ritenere che vi sia un mutamento dei significati quando si verifica la controservatività: stando ai parametri di Dummett, dunque, ammettere come ineluttabili le estensioni controservative significa di fatto adottare una concezione olistica. Ma allora siamo giunti ad un risultato paradossale: abbiamo assunto la conservatività per sfuggire all'olismo, ma così facendo siamo costretti proprio a ritornare ad esso. In effetti, non si vede perché la mancanza di conservatività debba essere così deprecabile, mentre la controservatività del tutto innocua: la propensione più naturale sarebbe proprio quella di affermare il contrario. Si noti però che su questo punto nemmeno l'osservazione di Prawitz è coerente: si può accusare Dummett di aver assunto una concezione olistica solo se si accetta la nozione dummettiana di olismo, ma questo Prawitz non lo può fare, se vuole sbarazzarsi della condizione di estensione conservativa senza, appunto, dover accettare l'olismo. Più in generale, se identificare l'olismo con la mancanza di conservatività è strettamente connesso all'adozione di una teoria verificazionista, allora la posizione di Prawitz non è a prima vista nemmeno coerente col suo verificazionismo. Vedremo presto il modo in cui Prawitz risolve questa difficoltà.

In sintesi, sembra dunque che ci troviamo di fronte al seguente dilemma: o trascuriamo la tensione tra metodi di prova intuitivamente corretti e metodi definibili entro linguaggi particolari — come Dummett sembra propenso a fare —, e forniamo una risposta al problema della circolarità, oppure lasciamo irrisolto quest'ultimo ma rendiamo giustizia al fatto che all'interno di un particolare linguaggio non si possa determinare esaustivamente un contesto di deduciblità, essendo sempre possibile estenderlo in maniera non conservativa. Per Prawitz, tuttavia, si tratta di un falso dilemma, perché entrambe le questioni possono essere trattate uniformemente mediante la sua nozione di argomento valido.

3.1.5. LA DEFINIZIONE DI ARGOMENTO VALIDO

La soluzione di Prawitz è che la forma di circolarità che si profila se non poniamo dei limiti alla complessità delle dimostrazioni costituisce un problema *solo se il concetto di dimostrazione viene spiegato in termini della validità delle inferenze di cui una dimostrazione è costituita*. Se abbandoniamo questo approccio, si apre la possibilità di definire la validità di una dimostrazione come una *proprietà globale*, per cui la validità delle singole inferenze può essere spiegata in termini della validità delle dimostrazioni in cui tali inferenze occorrono. L'idea è qui essenzialmente la seguente. Se definiamo le dimostrazioni nel primo modo, dobbiamo far riferimento, per la comprensione dell'enunciato dimostrato, alla totalità delle inferenze e degli enunciati coinvolti nella dimostrazione, mentre per uscire dalla circolarità rilevata da Dummett ciò di cui abbiamo bisogno è "an explanation of what a proof of a sentence A is *that does not depend on knowing what a proof is for all the sentences involved in the proof of* A *but only on knowing what a proof is for the constituents of* A" (Prawitz (1985), 167; corsivi nostri). In questo modo, benché la condizione di asseribilità di un enunciato α consista nel conoscere una dimostrazione di esso, l'unico aspetto specifico per la comprensione di α deve essere la conoscenza delle inferenze canoniche di α. Questo vuol dire che si profila una riforma del verificazionismo dummettiano: la vera caratteristica centrale del significato di un enunciato è non la sua condizione di asseribilità (diretta), ma solo le condizioni di asseribilità sulla base dei suoi costituenti immediati. Ciò si traduce, come ora vedremo, in una definizione di prova canonica in cui sia rilevante (o meglio: esplicitamente menzionato) solo quest'aspetto. Il verificazionismo di Prawitz non è dunque tale che una variazione delle condizioni di asseribilità di un certo enunciato, che può seguire all'introduzione di nuove regole nel linguaggio, comporti un mutamento del significato dell'enunciato stesso, perché le sue inferenze canoniche rimangono immutate, ed esse sono tutto quanto bisogna conoscere per sapere cos'è una prova canonica (il significato) dell'enunciato.

Veniamo ora alla definizione di argomento (logicamente) valido. Come abbiamo visto, la verità logica non deve essere identificata con la dimostrabilità in un particolare calcolo logico; ciò impone che le definizioni siano del tutto svincolate rispetto ad un sistema e ad un linguaggio particolari: nel seguito le nozioni di enunciato, formula, argomento, ecc., saranno quindi usate in un senso del tutto generale e astratto. Assumiamo la nozione di enunciato e di formula come primitiva. Una *derivazione* è una successione di applicazioni di regole di inferenza in un particolare sistema formale; una *dimostrazione* è invece ciò che stabilisce la verità di una proposizione, in un senso intuitivo: un sistema formale è adeguato quando le sue derivazioni rappresentano davvero delle dimostrazioni. Da una dimostrazone possiamo astrarre la sua *struttura d'argomento*, ossia il modo in cui gli enunciati presenti nella dimostrazione sono connessi inferenzialmente l'uno con l'altro. Tale struttura, detta più semplicemente *argomento* (che non è necessariamente ottenuto per astrazione a partire da una dimostrazione concreta), è quindi un insieme arbitrario di inferenze in forma d'albero. In un argomento possono essere presenti non soltanto enunciati asseriti, ma anche assunzioni e formule contenenti variabili libere. In questo caso l'argomento è detto *aperto*. Se tutte le assunzioni vengono scaricate e le variabili libere vengono vincolate mediante l'applicazione di determinate regole di inferenza, l'argomento è detto *chiuso* (un argomento chiuso può comunque contenere dei sottoargomenti aperti). Un argomento deve sempre contenere indicazioni che specificano (a) quali formule iniziali sono assunzioni, (b) dove un'assunzione è stata scaricata (se lo è stata), e (c) dove una variabile libera è stata vincolata (se lo è stata). Ciò è espresso dalla seguente

DEFINIZIONE. Un argomento è una quadrupla $\langle T, \Gamma, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \rangle$ dove T è un albero di formule, Γ è un insieme di formule iniziali in T (le assunzioni), $\mathfrak{F}_1$ è una funzione definita su un sottoinsieme di Γ tale che $\mathfrak{F}_1(\alpha)$ è un'occorrenza di formula in T sotto α (ossia, la conclusione dell'inferenza da cui α è scaricata), e $\mathfrak{F}_2$ è una funzione definita su un insieme di variabili libere occorrenti in formule di T tale che $\mathfrak{F}_2(x)$ è un'occorrenza di formula (ossia, la conclusione dell'inferenza da cui x è vincolata) sotto le occorrenze di formula in cui occorre x, e tale che per ogni formula α in Γ in cui occorre x, α è nel dominio di $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_1(\alpha)$ sta sopra o è uguale a $\mathfrak{F}_2(x)$.

Un argomento aperto $\mathbb{D}$ è da intendersi come uno schema che permette di ottenere argomenti chiusi $\mathbb{D}'$, mediante la sostituzione delle variabili non vincolate nel corso dell'argomento con dei termini, e delle assunzioni non scaricate con argomenti chiusi. Nell'argomento $\mathbb{D} \equiv \langle \mathbb{D}_1\beta_1, ..., \mathbb{D}_n\beta_n \rangle \Rightarrow \alpha$, $\mathbb{D}_1, ..., \mathbb{D}_n$ sono detti i *sottoargomenti immediati* di $\mathbb{D}$. Un argomento può essere valido o invalido; la nozione di argomento valido è relativizzata ad un particolare sistema di argomenti canonici per enunciati atomici.

DEFINIZIONE. Una *base atomica* è una coppia $\mathfrak{B} \equiv \langle \mathcal{L}, \mathfrak{R} \rangle$ dove $\mathcal{L}$ è un insieme di costanti descrittive, e $\mathfrak{R}$ è un insieme di regole di inferenza le cui premesse e conseguenze sono formule atomiche nel linguaggio $\mathcal{L}$.

La definizione di argomento *valido* si regge su due assunzioni:
(1) per ogni *forma di enunciato* che occorre in un argomento, resta specificata una *regola di introduzione*;
(2) per ogni inferenza nell'argomento che non è l'applicazione di una regola di introduzione, esiste una *operazione di giustificazione* che trasforma certi argomenti in un altro argomento per la stessa formula a partire da (al massimo) le stesse assunzioni dell'argomento trasformato. Le regole che non sono di introduzione sono dette di *eliminazione*, secondo il modello della deduzione naturale.
Le regole di introduzione per una certa forma di enunciato definiscono le *forme canoniche* degli enunciati aventi tale forma, determinando così il significato degli enunciati in questione, o meglio, il modo in cui il significato di tali enunciati dipende da quello dei loro componenti. Come abbiamo già osservato, questa idea si precisa nelle due seguenti tesi:
(1.1) Un argomento in forma canonica è corretto in virtù della sua stessa forma, purché i suoi sottoargomenti immediati siano a loro volta corretti;
(1.2) Assunzione fondamentale: un argomento chiuso in forma non canonica, se corretto, è sempre trasformabile in un argomento in forma canonica.

Il modo in cui tale trasformazione avviene è specificato mediante le procedure di giustificazione, che sono pensate in analogia con le procedure di riduzione della deduzione naturale. Eseguire le procedure di giustificazione connesse alle regole non canoniche permette di trasformare un dato argomento in un argomento in forma canonica. In questo modo, Prawitz può dire in cosa consista una dimostrazione (la condizione di asseribilità) di un dato enunciato: essa è un argomento chiuso a cui sia associato un insieme di procedure di giustificazione per le regole non canoniche che permette di trasformare l'argomento in un argomento valido in forma canonica. Nel seguito, diremo che un argomento $\mathbb{D}$ assieme ad un'assegnazione di operazioni di giustificazione $\mathcal{G}$ è valido ($<\mathbb{D}, \mathcal{G}>$ è valido), oppure che $\mathbb{D}$ è valido rispetto a $\mathcal{G}$. Se le premesse delle regole di introduzione e le assunzioni scaricate sono di complessità inferiore rispetto alla conclusione, la seguente definizione può essere intesa come un'induzione simultanea.

DEFINIZIONE. Un argomento $\mathbb{D}$ è *valido rispetto a $\mathcal{G}$ e ad una base atomica* $\mathfrak{B}$ sse
(1) $\mathbb{D}$ è un argomento chiuso in forma canonica e i suoi sottoargomenti immediati sono validi rispetto a $\mathcal{G}$ e a $\mathfrak{B}$; oppure
(2) $\mathbb{D}$ è un argomento chiuso non in forma canonica, ma è trasformabile in un argomento di cui vale la condizione (1) mediante l'applicazione successiva delle procedure in $\mathcal{G}$; oppure
(3) $\mathbb{D}$ è un argomento aperto e tutti gli argomenti chiusi $\mathbb{D}'$ — ottenuti sostituendo le variabili libere con termini chiusi e le assunzioni non scaricate con argomenti chiusi validi rispetto ad un'estensione $\mathcal{G}'$ di $\mathcal{G}$ — sono validi rispetto a $\mathcal{G}'$ e a $\mathfrak{B}$.

DEFINIZIONE. Un argomento $\mathbb{D}$ è *logicamente valido rispetto a $\mathcal{G}$* sse
(1) $\mathbb{D}$ è un argomento chiuso e $<\mathbb{D}, \mathcal{G}>$ è valido rispetto a tutte le basi atomiche; oppure
(2) $\mathbb{D}$ è un argomento aperto e per ogni $\mathfrak{B}$, tutti gli argomenti chiusi $<\mathbb{D}', \mathcal{G}'>$ sono validi relativamente a $\mathfrak{B}$ (dove gli argomenti chiusi sostituiti alle assunzioni non scaricate di $\mathbb{D}$ sono validi rispetto a $\mathcal{G}'$ e a $\mathfrak{B}$).

DEFINIZIONE. Una *regola di inferenza* è *valida* sse ogni sua applicazione preserva la validità degli argomenti. Una regola di introduzione è valida per definizione; una regola di eliminazione $\boldsymbol{R}$ è valida sse esiste una procedura di giustificazione ϕ tale che se $\mathbb{D}$ è un argomento la cui inferenza finale è data dall'applicazione di $\boldsymbol{R}$ e i cui sottoargomenti immediati sono validi rispetto alle procedure di giustificazione $\mathcal{G}$, allora anche $\mathbb{D}$ è valido rispetto a $\mathcal{G} \cup [\phi]$. $\boldsymbol{R}$ è *logicamente valida* sse ϕ è indipendente da ogni base atomica.

E' ora possibile definire la nozione di *conseguenza logica*, nel seguente modo:

DEFINIZIONE. Un enunciato α è *conseguenza logica* di un insieme finito Γ di enunciati sse esiste un argomento logicamente valido per α a partire dalle premesse non scaricate Γ.

O alternativamente:

DEFINIZIONE. Un enunciato α è conseguenza logica di un insieme Γ sse esiste un'operazione indipendente dalla base atomica $\mathfrak{B}$, tale che, se applicata ad argomenti per gli enunciati di Γ validi rispetto a $\mathfrak{B}$, dà come risultato un argomento per α valido rispetto a $\mathfrak{B}$.

Come si vede, le definizioni precedenti forniscono una nozione di validità intesa come proprietà globale di un argomento, da cui poi si ricava la nozione di inferenza valida. In questo modo l'unico aspetto rilevante per la comprensione di un enunciato è la conoscenza di cosa vale come argomento canonico valido di esso, e non anche di tutte le condizioni di asseribilità degli enunciati che compaiono nell'argomento. Pertanto, Prawitz ritiene di avere risolto entrambi i problemi posti alla fine del paragrafo precedente, essendo ora possibile che in un argomento canonico valido compaiano enunciati di complessità arbitraria senza che ciò dia luogo a circolarità, perché la comprensione di tali enunciati non è presupposta per la comprensione dell'enunciato finale. Inoltre, la nozione di conseguenza logica che ne risulta non coincide con la derivabilità in alcun particolare sistema formale: "A valid argument for a sentence B from a sentence A is not required to proceed in any given language or according to some given inference rules. All that is required is that the form of sentences used in the argument have been given a meaning by the specification of canonical arguments for them, and that the inferences in the argument that are not canonical have been assigned justifying procedures allowing us to transform the whole argument to canonical form when a valid argument has been substituted for A" (Prawitz (1985), 166). La possibilità di fare impiego di regole di inferenza e di elementi linguistici non vincolati ad un particolare sistema, permette anche di far risultare gli enunciati di Gödel come conseguenza logica degli assiomi delle rispettive teorie (ibid.). Un'altra importante caratteristica della definizione di argomento valido è che le procedure di giustificazione operano non su dimostrazioni (ossia, argomenti validi rispetto a certe procedure di giustificazione), ma su strutture di argomento: ciò costituisce un'importante deviazione rispetto alla BHK, in cui si parla di metodi che trasformano dimostrazioni — e non semplicemente strutture d'argomento — in altre dimostrazioni, e lascia irrisolto il problema sollevato da Dummett di un'adeguata rappresentazione del significato intuizionistico dell'implicazione.

Ci si può interrogare circa l'adeguatezza delle definizioni di Prawitz rispetto a due modalità di valutazione: in primo luogo, le definizioni sono adeguate se soddisfano i requisiti posti dallo stesso Prawitz (cfr. §2.3); in secondo luogo, se non vi sono obiezioni decisive riguardo alle assunzioni teoriche su cui le definizioni si reggono. Quanto al primo punto, Prawitz ammette che la sua definizione non dice nulla sul modo in cui giungiamo a conoscere le verità logiche, e che quindi essa non è del tutto soddisfacente. Un modo per ottenere qualche informazione rilevante in questo senso, potrebbe essere quello di richiedere, alla maniera di Kreisel, che per poter asserire legittimamente un certo enunciato si debba avere, oltre ad un $<\mathbb{D}, \mathcal{G}>$ valido, anche una dimostrazione del fatto che $<\mathbb{D}, \mathcal{G}>$ è valido, ma

Prawitz non ritiene che questa via sia praticabile perché comporterebbe un regresso all'infinito: la conoscenza delle dimostrazioni deve essere in ultima analisi implicita. Tuttavia, egli considera soddisfacente la definizione rispetto agli altri due requisiti, ossia la spiegazione del fondamento e della necessità della conseguenza logica. Il principio di base è che quando conosciamo la condizione per asserire correttamente un enunciato, allora sappiamo anche quando accettare un'inferenza che coinvolga quell'enunciato e quando accettare che esso segua logicamente da un certo insieme di premesse. Se ora ammettiamo che la condizione della corretta asseribilità di un enunciato è che si conosca un argomento valido chiuso per esso, risulta che perché β segua logicamente da α dobbiamo conoscere una procedura indipendente da ogni base atomica che trasforma un argomento valido (relativamente ad una certa $\mathcal{G}_1$) per α in un argomento valido (relativamente ad una $\mathcal{G}_2$) per β. Abbiamo dunque bisogno di due elementi: la conoscenza delle condizioni di asseribilità degli enunciati, e la conoscenza di una procedura che trasformi dimostrazioni delle premesse in dimostrazioni della conclusione. Tale procedura è data dalla *composizione* di tutte le procedure di giustificazione dell'argomento che si conclude con β, composizione che costituisce appunto un metodo per ottenere una prova canonica di β a partire da una prova canonica di α. Il fondamento e la necessità della conseguenza logica sono assicurati proprio da simili procedure (cfr. Prawitz (1985), 168; (1987), 160-161).

Prawitz individua pertanto la necessità della verità logica nell'esistenza di procedure di giustificazione indipendenti dalla base atomica che esplicitano i rapporti di dipendenza del significato delle varie regole applicate in un dato argomento, e determinano una situazione di armonia tra premesse e conseguenze degli enunciati coinvolti: le procedure di giustificazione garantiscono che le regole di eliminazione siano tali che da ogni enunciato sia inferibile *solo* ciò che segue dalle sue premesse. Poiché in questo modo il significato che le regole di eliminazione conferiscono alle costanti logiche è determinato dal significato conferito dalle regole di introduzione, tutto ciò che conta per la validità logica degli argomenti è il significato delle inferenze canoniche: “When $<\mathbb{D}, \mathcal{G}>$ is logically valid, *its validity thus depends only on the content of the logical constants determined by the introduction rules for compound sentences*" (Prawitz (1985), 165; corsivi nostri). Anche la definizione di Prawitz si basa dunque su una versione sofisticata della teoria della validità analitica: i significati sono determinati da regole, e la verità logica scaturisce da questi significati. Ma come per Dummett, non tutte le regole vanno bene: bisogna che esse soddisfino un qualche requisito di armonia. Sotto questo aspetto, la divergenza tra i due autori è secondaria: in entrambi i casi, si suppone che sia possibile individuare un *nucleo di base dei significati*, rispetto al quale gli altri significati devono risultare giustificati mediante un certo principio di armonia. Per Dummett, tale nucleo è da individuare in frammenti di linguaggio le cui estensioni devono essere conservative; per Prawitz, esso è localizzabile in certe regole canoniche per enunciati composti. Abbiamo già osservato che la proposta di Dummett va incontro a notevoli difficoltà; bisogna ora vedere se lo stesso valga per la teoria di Prawitz.

Chiaramente, il punto più problematico della proposta di Prawitz è dato dalla sua assunzione fondamentale, ossia che vi siano dei procedimenti canonici per inferire le varie forme di enunciato, tali che ogni argomento sia trasformabile in un nuovo argomento che si conclude con un'inferenza data dall'applicazione di una regola canonica. Questa assunzione coincide, in effetti, con la tesi secondo cui le regole di introduzione siano costitutive del significato degli operatori logici, e perciò stesso autogiustificanti: se l'assunzione fondamentale non valesse, le regole di introduzione non determinerebbero in maniera esaustiva i mezzi canonici per asserire enunciati aventi le corrispondenti costanti logiche come operatore principale, ossia non sarebbero capaci di fissare il significato delle costanti logiche; e d'altra parte, non potremmo sempre trovare una nuova dimostrazione che si concluda con l'applicazione di una delle regole di introduzione, se queste non esaurissero i mezzi canonici di asseribilità, ossia se non determinassero i significati delle costanti logiche. Il punto essenziale da tener presente è che Prawitz — come si può desumere dal complesso dei suoi scritti — non è interessato in maniera particolare al significato degli operatori logici che deriva loro dal fatto di essere impiegati in contesti che esulano dall'ambito della matematica: una teoria costruttivistica del significato per i linguaggi naturali è infatti ancora di là da venire. Pertanto, l'assunzione di Prawitz deve intendersi come riferita a quest'ambito ristretto. La posizione di Dummett è invece molto diversa: gli operatori logici vengono impiegati *anzitutto* in contesti non deduttivi, e dunque il loro significato non può essere determinato che in maniera parziale dalle regole di introduzione: ciò vuol dire che le costanti logiche non sono *puramente* logiche. Consideriamo per esempio il caso del quantificatore universale: accanto all'inferenza deduttiva che passa dalla formula con variabile libera alla formula quantificata, l'altra via ovvia per ottenere quest'ultima è l'inferenza induttiva. Dummett suggerisce pertanto di ammettere forme di ragionamento non deduttive, e di indebolire corrispondentemente la nozione di argomento valido, passando a quella di argomento *ammissibile*. Ciò, rileva Dummett, non può però compromettere la procedura di giustificazione delle leggi logiche: tutto quello che abbiamo fatto è riconoscere che talvolta traiamo false conclusioni da false premesse (risultanti da osservazioni fallaci), ossia, che spesso facciamo delle asserzioni non stabilite conclusivamente (cfr. Dummett (1991), 278-279). Ma anche a prescindere da questo problema, Dummett ritiene che l'assunzione fondamentale sia plausibile solo in alcuni casi. Se consideriamo le singole regole di introduzione, appare naturale ammettere, egli sostiene, che la regola della disgiunzione e del quantificatore esistenziale determinino il significato delle rispettive costanti logiche, perché entrambe danno una “comunicazione incompleta" di una verità più specifica; diversamente stanno le cose nel caso dell'implicazione e del quantificatore universale, in cui sono piuttosto le regole di eliminazione a determinare il significato: un enunciato della forma $\alpha \rightarrow \beta$ è asseribile quando sappiamo di poter asserire β ogniqualvolta possiamo asserire α; un enunciato della forma $\forall x \alpha(x)$ è invece asseribile quando sappiamo che la proprietà α vale di *tutti* gli oggetti del dominio, ovvero quando abbiamo motivi per asserire che α vale di *qualsiasi* oggetto (ibid., 272-275). Di parere nettamente diverso è, per esempio, Tennant (1987), per il quale invece è proprio nel caso della disgiunzione e del quantificatore esistenziale che il significato è determinato dalle regole di eliminazione.

Sembra allora chiaro che la controversia sulle regole che determinano il significato rischia di dare luogo a discussioni senza fine, e ciò a nostro avviso mette in risalto la problematicità dell'idea stessa che si possano specificare delle regole autogiustificanti che siano tali non per una decisione arbitraria ma per motivi immediatamente evidenti. L'intrinseca debolezza della tesi dell'esistenza di un nucleo di base del significato, in entrambe le versioni dei nostri autori, è attestata dalla mancanza di argomenti convincenti in questo senso. L'idea di armonia si regge su un principio *relazionale*: date certe regole, le altre regole del linguaggio non possono essere fissate arbitrariamente. Ma ciò vuol dire che le regole di base *non sono governate da alcun principio di armonia*, e dunque, per essere sicuri che esse diano luogo a leggi logiche valide (o più in generale, a significati intelligibili), dobbiamo disporre di qualche principio indipendente. Ma abbiamo visto che le proposte in questa direzione sono state finora molto deboli. Ciò non vuol dire affatto che la nozione di armonia perda ogni interesse; ci sembra piuttosto che la nozione *rilevante* di armonia sia quella che non assume nessun complesso di regole come primitive, se non in maniera *relativizzata*: ciò che conta è il rapporto tra le regole, e non quali regole sono costitutive del significato. A questo proposito, un'interessante prospettiva è stata aperta dalla nozione dummettiana di *stabilità*.