Mathematische Logik I – Übungsaufgaben — Blatt 7

Dr. Michael Arndt — **WS 2014/15**

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma:

> *Es sei* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$. *Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*
>
> *(1)* Γ *ist konsistent.*
>
> *(2) Es gibt keine Formel* $\phi \in \mathrm{PROP}$, *so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.
>
> *(3) Es gibt eine Formel* $\phi \in \mathrm{PROP}$, *so dass* $\Gamma \nvdash \phi$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma:

> *Es sei* $\Gamma \subseteq PROP$ *eine maximal-konsistente Menge und* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$.
> *Dann ist* $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ *genau dann, wenn* $\phi \in \Gamma$ *und* $\psi \in \Gamma$.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

Geben Sie, sofern möglich, für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an, welche die genannte Eigenschaft hat. Geben Sie jeweils eine Begründung.

a) Γ hat genau zwei maximal-konsistente Erweiterungen.

b) Γ hat genau drei maximal-konsistente Erweiterungen.

Aufgabe 4 (1+1+1 Punkte)

Erweitern Sie die folgenden Mengen durch Hinzufügen einer einzigen Formel, die nicht für sich alleine genommen bereits inkonsistent ist, so dass die resultierende Menge inkonsistent ist. Geben Sie jeweils eine Ableitung der Absurdität $\bot$ an.

a) $\{p_0 \wedge p_1 \to p_2,\ p_0 \wedge (p_2 \to \bot)\}$

b) $\{p_0 \to (p_1 \to \bot),\ p_1 \to (p_0 \to \bot)\}$

c) $\{p_k \to p_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 5 (3+2 Punkte)

Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ heiße *unabhängig* von der Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$, falls $\Gamma \nvdash \phi$ und $\Gamma \nvdash \phi \to \bot$.

a) Zeigen Sie, dass die Formel $p_1 \to p_2$ unabhängig von der Menge $\{p_1 \to p_0 \wedge (p_2 \to \bot),\ p_2 \to p_0\}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine Menge Γ gibt, von der die Formel $p_0 \to (p_1 \to p_0)$ unabhängig ist.