Mathematische Logik I

— Foliensatz 4 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Semantische Eigenschaften der Junktoren

In diesem Kapitel werden wir uns mit den semantischen Eigenschaften der Junktoren beschäftigen.

Zunächst wird der Begriff des Junktors auf Junktoren beliebiger Stelligkeit verallgemeinert, um damit die funktionale Vollständigkeit von Junktorenmengen diskutieren zu können.

Im Anschluss daran wird die Dualität von Junktoren besprochen.

Allgemeine Junktoren

Definition 1 (Allgemeine Junktoren)

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei ein n-stelliger Junktor \$ gegeben, d.h. wenn $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{PROP}$, dann auch $\$(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathrm{PROP}$.

Weiterhin sei für \$ eine n-stellige Wahrheitsfunktion $f_\$: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definiert (z.B. durch eine Wahrheitstafel).

Dann ist die Bewertung einer Formel $\$(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ unter einer Belegung v definiert als:

$$[\![\$(\phi_1, \ldots, \phi_n)]\!]_v =_{\mathrm{def}} f_\$\big([\![\phi_1]\!]_v, \ldots, [\![\phi_n]\!]_v\big).$$

Allgemeine Junktoren

Beispiel:

Die Wahrheitsfunktion des Junktors $\triangleright$ sei durch folgende Wahrheitstafel gegeben:

ϕ	ψ	χ	$\triangleright(\phi, \psi, \chi)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Alle nullstelligen und alle einstelligen Junktoren

Falsum

$$\frac{\bot()}{0}$$

Verum

$$\frac{\top()}{1}$$

Falsum

ϕ	$\dot{\bot}(\phi)$
0	0
1	0

Position

ϕ	$-(\phi)$
0	0
1	1

Negation

ϕ	$\neg(\phi)$
0	1
1	0

Verum

ϕ	$\dot{\top}(\phi)$
0	1
1	1

Alle zweistelligen Junktoren

Falsum

ϕ	ψ	Ï(ϕ, ψ)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Konjunktion

ϕ	ψ	$\wedge(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Postsektion

ϕ	ψ	$\succ\!-(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Präpendenz

ϕ	ψ	$\bullet\!-(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Präsektion

ϕ	ψ	$-\!\prec(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Postpendenz

ϕ	ψ	$-\!\bullet(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Kontrajunktion

ϕ	ψ	$\succ\!\prec(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Disjunktion

ϕ	ψ	$\vee(\phi, \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Alle zweistelligen Junktoren

Rejektion

ϕ	ψ	$\downarrow(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Biimplikation

ϕ	ψ	$\leftrightarrow(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Postnonpendenz

ϕ	ψ	$\dashv(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Replikation

ϕ	ψ	$\leftarrow(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Pränonpendenz

ϕ	ψ	$\vdash(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Implikation

ϕ	ψ	$\rightarrow(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exklusion

ϕ	ψ	$\mid(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Verum

ϕ	ψ	$\ddot{\top}(\phi,\psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Darstellbarkeit/Funktionale Vollständigkeit

Definition 2 (Darstellbarkeit/Funktionale Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{K}$ eine Menge beliebiger Junktoren.

Ein n-stelliger Junktor \$ läßt sich über $\mathcal{K}$ *darstellen*, falls es eine Formel χ gibt, so dass in χ höchstens Aussagevariablen $p_1, \dots p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ vorkommen und es gilt:

$$\$(p_1, \dots, p_n) \mathrel{=\!\mid\!\models} \chi$$

Die Menge $\mathcal{K}$ heißt *(wahrheits-)funktional vollständig*, falls sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeder n-stellige Junktor \$ über $\mathcal{K}$ darstellen läßt.

Darstellbarkeit von Junktoren

Bemerkung:

Sei χ Formel, die einen Junktor \$ darstellt. Aus dem Substitutionssatz folgt damit für beliebige $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \text{PROP}$:

$$\$(\phi_1, \ldots, \phi_n) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi[\phi_1/p_1, \ldots, \phi_n/p_n]$$

Dadurch ist die Darstellung von allgemeinen Junktoren durch Formelschemta begründet.

Darstellbarkeit von Junktoren

Bemerkung:

Nach der Definition von Darstellbarkeit dürfen bei der Darstellung von $\perp$ (und $\top$) nur Formeln verwendet werden, die keine Aussagevariablen enthalten. Damit kann $\perp$ lediglich durch 0-stellige Junktoren dargestellt werden. Daher müßte bereits in jeder vollständigen Menge $\perp$ (oder $\top$) vorkommen.

Um dies zu vermeiden, erlauben wir für $\perp$ (und $\top$), dass es durch Formeln χ dargestellt werden darf, die höchstens die Aussagevariable p_1 enthalten.

Darstellbarkeit von Junktoren

Theorem 3 (Darstellbarkeit der ursprünglichen Junktoren)

Die ursprünglichen Junktoren lassen sich wechselseitig durch andere Junktoren darstellen. Für alle $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *gilt z.B.:*

1. $\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$
2. $\phi \to \psi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \neg\phi \vee \psi$
3. $\phi \vee \psi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \neg\phi \to \psi$
4. $\phi \vee \psi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
5. $\phi \wedge \psi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \neg(\neg\psi \vee \neg\phi)$
6. $\neg\phi \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \phi \to \bot$
7. $\bot \mathrel{=}\!\mid\!\mid\!\!\models \phi \wedge \neg\phi$

Funktionale Vollständigkeit

Theorem 4 (Funktionale Vollständigkeit)

Sei $\mathcal{K} =_{\mathsf{def}} \{\wedge, \vee, \neg, \perp\}$.

Für jeden n-stelligen Junktor $ ($n \in \mathbb{N}$) gibt es eine Formel χ*, die genau die Aussagesymbole* $p_1, \ldots, p_n$ *und höchstens Junktoren aus* $\mathcal{K}$ *enthält, so dass gilt:*

$$\$(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} \chi$$

Beweis:

Durch Induktion über der Anzahl n der Stellen von $.

Funktionale Vollständigkeit

I. Induktionsanfang:

Für $\$ \mathrel{\hat{=}} \bot$ ist die Aussage trivial.

Sei also $\$ \not\mathrel{\hat{=}} \bot$.

Damit gilt, dass in der Wahrheitstafel von $\$$ eine 1 steht (d.h., dass die Wahrheitstafel von $\$$ nur aus der 1 besteht), muss $f_{\$} = f_{\top} = 1 - f_{\bot}$ sein.

Betrachte $\chi \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \neg\bot$.

Offensichtlich enthält χ keine Aussagevariablen und nur Junktoren aus $\mathcal{K}$. Es gilt zudem: $\$ \mathrel{=\!\mid\!\models} \chi$.

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Funktionale Vollständigkeit

II. Induktionsvoraussetzung:

Angenommen, die Aussage gilt für alle n-stelligen Junktoren.

III. Induktionsschluß:

Sei \$ ein beliebiger $n+1$-stelliger Junktor, mit einer $n+1$-stellige Wahrheitsfunktion $f_{\$}$.

Definiere zwei n-stellige Junktoren $\$_0, \$_1$ durch folgende, n-stellige Wahrheitsfunktionen:

$$f_{\$_0}(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} f_{\$}(x_1, \ldots, x_n, 0)$$
$$f_{\$_1}(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} f_{\$}(x_1, \ldots, x_n, 1)$$

Funktionale Vollständigkeit

Sei v eine beliebige Belegung. Damit gilt:

Falls $v(p_{n+1}) = 0$:

$$\begin{aligned}
[\![\$(p_1, \ldots, p_{n+1})]\!]_v &= [\![\$_0(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \\
&= [\![\$_0(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \cdot [\![\neg p_{n+1}]\!]_v \\
&= [\![\$_0(p_1, \ldots, p_n) \wedge \neg p_{n+1}]\!]_v
\end{aligned}$$

Falls $v(p_{n+1}) = 1$:

$$\begin{aligned}
[\![\$(p_1, \ldots, p_{n+1})]\!]_v &= [\![\$_1(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \\
&= [\![\$_1(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \cdot [\![p_{n+1}]\!]_v \\
&= [\![\$_1(p_1, \ldots, p_n) \wedge p_{n+1}]\!]_v
\end{aligned}$$

Funktionale Vollständigkeit

Insgesamt gilt:
$\$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \big(\$_0(p_1, \ldots, p_n) \wedge \neg p_{n+1}\big) \vee \big(\$_1(p_1, \ldots, p_n \wedge p_{n+1})\big)$

Nach IV gibt es Formeln χ_0, χ_1, so dass diese genau die Aussagevariablen $p_1, \ldots, p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthalten und dass gilt:

$$\$_0(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi_0$$
$$\$_1(p_1, \ldots, p_n) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi_1$$

Definiere $\chi \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \big(\chi_0 \wedge \neg p_{n+1}\big) \vee (\chi_1 \wedge p_{n+1})$.

Dann folgt mit Substitutionssatz für

$$\$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi$$

Dabei erfüllt χ die geforderten Bedingungen. $\square$

Funktionale Vollständigkeit

Beispiel:

Es sei \$ ein zweistelliger Junktor, der über eine Wahrheitstafel definiert wird.

Vorsicht: Wir schreiben in den Wahrheitstafeln die Argumente in umgekehrter Reihenfolge! Damit wird erreicht, dass zuerst ϕ_1 in die Formel aufgenommen wird, und zuletzt ϕ_2 hinzukommt.

ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Funktionale Vollständigkeit

ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}\bot \\ \hline \neg\bot\end{array}\right\}\chi_0 \\ \hline \left.\begin{array}{r}\bot \\ \hline \bot\end{array}\right\}\chi_1 \end{array}\right\}\chi$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned}
\chi_0 &\mathrel{\widehat{=}} (\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\neg\bot \wedge \phi_1) \\
\chi_1 &\mathrel{\widehat{=}} (\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\bot \wedge \phi_1) \\
\chi &\mathrel{\widehat{=}} (\chi_0 \wedge \neg\phi_2) \vee (\chi_1 \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{\widehat{=}} \quad (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\neg\bot \wedge \phi_1)) \wedge \neg\phi_2) \\
&\qquad \vee\ (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\bot \wedge \phi_1)) \wedge \phi_2)
\end{aligned}$$

Funktionale Vollständigkeit

Nach Theorem 4.4 gilt nun $\$(\phi_1, \phi_2) \mathrel{=\!\!\|\!\!=} \chi$ für
$\chi \doteq (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\neg\bot \wedge \phi_1)) \wedge \neg\phi_2) \vee (((\bot \wedge \neg\phi_1) \vee (\bot \wedge \phi_1)) \wedge \phi_2)$.

Da für alle $\phi \in$ PROP gilt, dass $\bot \wedge \phi \mathrel{=\!\!\|\!\!=} \bot$ und $\neg\bot \wedge \phi \mathrel{=\!\!\|\!\!=} \phi$, läßt sich χ unter Verwendung von Substitution weiter vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\chi &\mathrel{=\!\!\|\!\!=} ((\bot \vee \phi_1) \wedge \neg\phi_2) \vee ((\bot \vee \bot) \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{=\!\!\|\!\!=} (\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \vee (\bot \wedge \phi_2) \\
&\mathrel{=\!\!\|\!\!=} (\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \vee \bot \\
&\mathrel{=\!\!\|\!\!=} \phi_1 \wedge \neg\phi_2
\end{aligned}
$$

Funktionale Vollständigkeit

Korollar 5

Folgende Mengen von Junktoren sind funktional vollständig:

- $\{\rightarrow, \bot\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$

Inversion

Definition 6 (Inversion)

Die Abbildung $(\cdot)^\iota : \mathrm{PROP} \to \mathrm{PROP} : \phi \mapsto (\phi)^\iota$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

1. $(p_k)^\iota \doteqdot_{\mathrm{def}} \neg p_k \quad$ für jedes $k \in \mathbb{N}$
2. $(\neg\phi)^\iota \doteqdot_{\mathrm{def}} \neg(\phi)^\iota$
3. $\big((\phi \wedge \psi)\big)^\iota \doteqdot_{\mathrm{def}} \big((\phi)^\iota \vee (\psi)^\iota\big)$
4. $\big((\phi \vee \psi)\big)^\iota \doteqdot_{\mathrm{def}} \big((\phi)^\iota \wedge (\psi)^\iota\big)$

Inversion

Lemma 7

Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ *und für jede Belegung* v *gilt:*

$[\![(\phi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![\phi]\!]_v = [\![\neg\phi]\!]_v$.

Korollar 8

Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ *gilt:* $(\phi)^\iota \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\phi$.

Inversion

Beweis des Lemmas:

Durch Induktion über den Aufbau von ϕ, wobei nur Formeln über der funktional vollständigen Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet werden.

Sei nun v eine beliebige Belegung.

I. Induktionsanfang:

p: Es gilt: $(p)^\iota \doteq \neg p$.

Damit: $[\![(p)^\iota]\!]_v = [\![\neg p]\!]_v = 1 - [\![p]\!]_v$.

Inversion

II. Induktionsvoraussetzung:

Für die Formel ψ sei $[\![(\psi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![\psi]\!]_v = [\![\neg\psi]\!]_v$ und
für die Formel χ sei $[\![(\chi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![\chi]\!]_v = [\![\neg\chi]\!]_v$.

III. Induktionsschluß:

$\neg\psi$: Es ist $(\neg\psi)^\iota \doteq \neg(\psi)^\iota$. Damit:

$$[\![(\neg\psi)^\iota]\!]_v = [\![\neg(\psi)^\iota]\!]_v = 1 - [\![(\psi)^\iota]\!]_v \overset{(IV)}{=} 1 - [\![\neg\psi]\!]_v = [\![\neg\neg\psi]\!]_v$$

$(\psi \vee \chi)$: Analog zum Fall $(\psi \wedge \chi)$.

Inversion

$(\psi \wedge \chi)$: Es ist $\big((\psi \wedge \chi)\big)^{\iota} \doteq \big((\psi)^{\iota} \vee (\chi)^{\iota}\big)$. Damit:

$$\begin{aligned}&[\![\big((\psi \wedge \chi)\big)^{\iota}]\!]_v = [\![(\psi)^{\iota} \vee (\chi)^{\iota}]\!]_v = f_{\vee}([\![(\psi)^{\iota}]\!]_v, [\![(\chi)^{\iota}]\!]_v)\\ &\overset{(IV)}{=} f_{\vee}(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v) = \max(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v)\end{aligned}$$

Nun ist $\max(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\chi]\!]_v) = 0$ genau dann, wenn $[\![\psi]\!]_v = [\![\chi]\!]_v = 1$.

Das ist genau dann der Fall, wenn $[\![\psi \wedge \chi]\!]_v = 1$.

Somit: $[\![(\psi \wedge \chi)^{\iota}]\!]_v = 1 - [\![\psi \wedge \chi]\!]_v = [\![\neg(\psi \wedge \chi)]\!]_v$.

$\square$

Dualität

Definition 9 (Dualität)

Die Abbildung $(\,\cdot\,)^\delta : \mathrm{PROP} \to \mathrm{PROP} : \phi \mapsto (\phi)^\delta$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

1. $(p_k)^\delta \mathrel{\hat=}_{\mathrm{def}} p_k \quad$ für jedes $k \in \mathbb{N}$
2. $(\neg\phi)^\delta \mathrel{\hat=}_{\mathrm{def}} \neg(\phi)^\delta$
3. $\big((\phi \wedge \psi)\big)^\delta \mathrel{\hat=}_{\mathrm{def}} \big((\phi)^\delta \vee (\psi)^\delta\big)$
4. $\big((\phi \vee \psi)\big)^\delta \mathrel{\hat=}_{\mathrm{def}} \big((\phi)^\delta \wedge (\psi)^\delta\big)$

Dualität

Theorem 10

Dualitätssatz Seien $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$.

Es ist $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ *genau dann, wenn* $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\psi)^\delta$.

Beweis:

Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

"$\Rightarrow$:" Unter der Voraussetzung $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ gilt auch $\neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg\psi$, und daher (nach Korollar 8) auch $(\phi)^\iota \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\psi)^\iota$.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Menge von Aussagenvariablen $\{p_0, \ldots, p_n\} \supseteq \mathrm{AV}(\phi) \cup \mathrm{AV}(\psi)$.

Dualität

Für die simultane Substitution dieser $n+1$ Aussagenvariablen durch deren Negation gilt:

$$(\phi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\psi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Dabei sind:

$$(\phi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \doteq (\phi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$
$$(\psi)^\iota[\neg p_0, \ldots, \neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \doteq (\psi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Das bedeutet:

$$(\phi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\psi)^\delta[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n / p_0, \ldots, p_n]$$

Daraus folgt direkt: $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\psi)^\delta$.

Dualität

"$\Leftarrow$:" Sei $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta$ gegeben.

Nun folgt aus "$\Rightarrow$" bereits: $((\phi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} ((\psi)^\delta)^\delta$.

Da $((\phi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$ und $((\psi)^\delta)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$, gilt schon: $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$.

Insgesamt ist gezeigt, dass $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$ genau dann, wenn $(\phi)^\delta \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi)^\delta$.

$\square$