

## Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte)

Zeigen Sie im Kalkül NK, in dem die Regeln aus Proposition 6.7 Grundregeln sind, dass folgende Beziehungen gelten:

- a)  $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$
- b)  $\vdash (\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi$
- c)  $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$

## Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)

Sei  $\phi | \psi$  eine Abkürzung für  $\phi \wedge \psi \rightarrow \perp$ . Zeigen Sie für NK':

- a)  $\phi | \psi, \phi, \psi \vdash \perp$
- b) Wenn  $\Gamma, \phi \vdash \perp$ , dann  $\Gamma \vdash \phi | \psi$ . Wenn  $\Gamma, \psi \vdash \perp$ , dann  $\Gamma \vdash \phi | \psi$ .
- c) Leiten Sie aus den Ergebnissen von a) und b) Einführungs- und Beseitigungsregeln für  $|$  an.

## Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung.

- a)  $\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_0\}$
- b)  $\{p_0, p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow \perp\}$
- c)  $\{p_{2k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{p_{2k+1} \rightarrow \perp : k \in \mathbb{N}\}$

## Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  an, welche die genannte Eigenschaft hat. Geben Sie jeweils eine Begründung.

- a)  $\Gamma$  hat keine maximal-konsistente Erweiterung.
- b)  $\Gamma$  hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.
- c)  $\Gamma$  hat unendlich viele maximal-konsistente Erweiterungen.