Mathematische Logik I – Übungsaufgaben **Blatt 7**

Dr. Michael Arndt **WS 2015/16**

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma:

Es sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Γ *ist konsistent.*

(2) Es gibt keine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$*, so dass* $\Gamma \vdash \phi$ *und* $\Gamma \vdash \phi \to \bot$.

(3) Es gibt eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$*, so dass* $\Gamma \nvdash \phi$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma:

Es sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *eine maximal-konsistente Menge und* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$.
Dann ist $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ *genau dann, wenn* $\phi \in \Gamma$ *und* $\psi \in \Gamma$.

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte)

Erweitern Sie die folgenden Mengen durch Hinzufügen einer einzigen Formel, die nicht für sich alleine genommen bereits inkonsistent ist, so dass die resultierende Menge inkonsistent wird. Geben Sie jeweils eine Ableitung der Absurdität $\bot$ an.

a) $\{p_k \to p_{2k+1} : k \in \mathbb{N}\}$

b) $\{p_0 \to (p_1 \to \bot), p_1 \to (p_0 \to \bot)\}$

c) $\{p_0 \wedge p_1 \to p_2, (p_3 \to \bot) \to (p_1 \wedge (p_2 \to \bot))\}$

Aufgabe 4 (3+1 Punkte)

Eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ heiße *unabhängig* von der Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$, falls $\Gamma \nvdash \phi$ und $\Gamma \nvdash \phi \to \bot$.

a) Zeigen Sie, dass die Formel $p_1 \to p_2$ unabhängig von der Menge $\{p_1 \to p_0 \wedge (p_2 \to \bot), p_2 \to p_0\}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass es keine Menge Γ gibt, von der die Formel $p_0 \to (p_1 \to p_0)$ unabhängig ist.