Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik II

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 2**

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Komprehensionsschema die Bedingung an X^n notwendig ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\neg X(x)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Zeigen Sie: $\Gamma \vdash_2 \phi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_1 \phi^*$.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage durch Induktion über die Struktur der Herleitung mit dem Komprehensionsschema und vereinfachten $\forall, \exists$-Regeln. Für die Quantorenregeln ist es vorteilhaft, einen Zwischenschritt zu verwenden, bei dem die freie Variable durch eine geeignete neue Konstante ersetzt wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie Ableitungen an zu:

a) $\vdash_2 \phi \vee \psi \leftrightarrow \forall X^0((\phi \rightarrow X^0) \wedge (\psi \rightarrow X^0) \rightarrow X^0)$

b) $\vdash_2 \exists X^n \phi \leftrightarrow \forall X^0(\forall X^n((\phi \rightarrow X^0) \rightarrow X^0))$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie Ableitungen an zu:

a) $\vdash_2 x = x$

b) $\vdash_2 x = y \rightarrow y = x$

c) $\vdash_2 x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$

d) $\vdash_2 x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(x))$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Geben Sie eine Formel $\phi(X^2)$ an, die besagt, dass X^2 eine Funktion ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie: $\mathfrak{A}_2 \models \phi \Rightarrow \mathfrak{A}_1 \models \phi^*$.

Dabei seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ wie in der Vorlesung definiert.

(Aufgaben 1-5 aus van Dalen, Logic and Structure, 4. Aufl., S. 151)