Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

PD Dr. Fritz Hamm, Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 10**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien $\sigma = \{{}^{u_1}/_{s_1}, \ldots, {}^{u_m}/_{s_m}\}$ und $\tau = \{{}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n}\}$ Substitutionen. Die *Komposition* $\sigma\tau$ von σ und τ sei diejenige Substitution, die man man aus der Menge

$$\{{}^{u_1}/_{s_1\tau}, \ldots, {}^{u_m}/_{s_m\tau}, {}^{v_1}/_{t_1}, \ldots, {}^{v_n}/_{t_n}\}$$

durch Entfernen folgender Bindungen erhält:

- jeder Bindung ${}^{u_i}/_{s_i\tau}$ mit $u_i \doteq s_i\tau$,
- jeder Bindung ${}^{v_j}/_{t_j}$ mit $v_j \in \{u_1, \ldots, u_m\}$.

Zeigen Sie, daß diese Definition zu der in der Vorlesung gegebenen Definition der Komposition von Substitutionen äquivalent ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Skolemisieren Sie die folgenden Formeln:

a) $\forall x P(x,z) \rightarrow \exists y Q(y,z)$

b) $\exists x P(x,z) \rightarrow \exists y Q(y,z)$

c) $\exists x P(x,z) \rightarrow \forall y Q(y,z)$

d) $\forall x P(x,z) \rightarrow \forall y Q(y,z)$

e) $\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$

f) $\forall x (P(x,y) \rightarrow \exists y Q(y))$

g) $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y))$

h) $\forall x (\exists y P(x,y) \wedge \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y R(x,y))$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Mengen von Formeln einen allgemeinsten Unifikator an, sofern ein solcher existiert, oder begründen Sie, warum es keinen gibt.

a) $\{P(f(a), g(x,y)), P(x, g(a, f(z)))\}$

b) $\{Q(x,x,f(x)), Q(a,y,z)\}$

c) $\{P(x, f(g(x,b))), Q(a, f(z))\}$

d) $\{P(a, f(x), f(f(x))), P(x,y,z)\}$

e) $\{Q(z, f(x), f(f(x))), Q(x,y,z)\}$

f) $\{P(f(x), g(a, f(z))), P(f(g(y,a)), g(y, f(f(c))))\}$

g) $\{Q(a, g(a, f(x)), y), Q(a, g(a,z), f(z)), Q(x, g(x, f(x)), f(f(b)))\}$

h) $\{P(x, g(a, f(x))), P(f(y), g(z,y))\}$