
Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch einen Resolutionsbeweis: $\models (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Wenn $\mathrm{Kl}(A) = \mathrm{Kl}(B)$, dann $A \models B$ und $B \models A$. (Das heißt, wenn zwei Formeln A und B in KNF dieselbe Klauselmenge ergeben, dann sind A und B logisch äquivalent.)
Was gilt für die umgekehrte Richtung?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Ist die Regel

$$\frac{X_1 \vdash Y_1, A, B \qquad A, B, X_2 \vdash Y_2}{X_1, X_2 \vdash Y_1, Y_2}$$

semantisch korrekt? Begründen Sie.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachte das folgende (polynomialzeitliche) Verfahren: Für eine Formel C seien $C_1, \ldots, C_n$ deren Teilformeln, wobei insbesondere $C_n = C$. Desweiteren seien $A_1, \ldots, A_n$ neue atomare Formeln. Die Formel D sei dann die Konjunktion von A_n und den konjunktiven Normalformen aller folgenden Formeln:

$$\begin{array}{rcl} (A_i \vee A_j) \leftrightarrow A_k & \text{falls} & C_k = (C_i \vee C_j) \\ (A_i \wedge A_j) \leftrightarrow A_k & \text{falls} & C_k = (C_i \wedge C_j) \\ \neg A_i \leftrightarrow A_k & \text{falls} & C_k = \neg C_i \end{array}$$

(Wobei $A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A)$.)

(a) Wenden Sie das Verfahren auf die Formel $(((\neg A \vee B) \wedge \neg C) \vee D) \wedge \neg E$ an. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, daß das Verfahren zu jeder Formel C eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel D in konjunktiver Normalform erzeugt. (6 Punkte)