Prof. Schroeder-Heister **Sommersemester 2014**
René Gazzari **Universität Tübingen**

Mathematische Logik I

Blatt 6

DEF (endlich erfüllbar): Eine Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ von Formeln heißt *endlich erfüllbar*, wenn jede endliche (!) Teilmenge $\Delta \subseteq_f \Gamma$ erfüllbar ist.

Zur Erinnerung: Die Menge Δ ist erfüllbar, falls es eine Belegung v gibt, so dass für alle $\phi \in \Delta$ die Gleichhung $[\![\phi]\!]_v = 1$ erfüllt ist.

Aufgabe 20: Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist Γ erfüllbar, dann ist Γ insbesondere endlich erfüllbar.
2. Ist Γ endlich und endlich erfüllbar, dann ist Γ erfüllbar.
3. Ist Γ endlich erfüllbar, dann läßt sich Γ zu einer maximalen Menge $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ erweitern, die ebenfalls endlich erfüllbar ist.

   Gehen Sie analog zum Beweis des Satzes 7.7 (Konsistente Erweiterbarkeit) vor.
4. *2 Zusatzpunkte:* Ist Γ endlich erfüllbar ist, dann ist Γ erfüllbar.

Aufgabe 21: Beweisen Sie die in Prop 6.8 genannten abkürzenden Schlussregeln für die Disjunktion im Kalkül NK′. Zeigen Sie also für beliebige Formeln $\phi, \psi, \sigma \in \mathrm{PROP}$ und beliebige Formelmengen $\Gamma, \Delta_\phi, \Delta_\psi \subseteq \mathrm{PROP}$ die folgenden Aussagen:

(a) $\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Delta_\phi, \phi \vdash \sigma$ und $\Delta_\psi, \psi \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \Delta_\phi, \Delta_\psi \vdash \sigma$
(b) $\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi$
(c) $\Gamma \vdash \psi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \vee \psi$

Beachten Sie, dass $(\phi \vee \psi)$ lediglich eine abkürzende Schreibweise ist.

Aufgabe 22: Beweisen Sie die folgenden Behauptungen im Kalkül NK:

(a) $\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$
(b) $\vdash \phi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
(c) $\vdash \phi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
(d) $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Aufgabe 23 (Zusatzaufgabe): Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(a) Γ hat keine maximal-konsistente Erweiterung.
(b) Γ hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.
(c) Γ hat genau zwei maximal-konsistente Erweiterungen.
(d) Γ hat überabzählbar viele maximal-konsistente Erweiterungen.
(e) Γ hat abzählbar viele maximal-konsistente Erweiterungen.

Sie dürfen als Erleichterung die Vollständigkeit des Kalküls voraussetzen und semantisch argumentieren; Sie müssen aber natürlich nicht.

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 28. Mai.